



УДК №51

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Шевцова Татьяна Геннадьевна

студент

ФГБОУ ВО «Армавирский государственный педагогический университет», г. Армавир

Аннотация. Статья посвящена методическим особенностям решения иррациональных неравенств. Рассматриваются различные методы решения. В статье приведены примеры решения различных видов иррациональных неравенств, а также разобраны типичные ошибки, которые могут возникнуть при их решении. Автор подчеркивает важность понимания процесса решения таких неравенств для успешного освоения материала и подготовки к экзаменам.

Ключевые слова: иррациональные неравенства, уравнения, методы решения, методические аспекты, равносильные преобразования, пример, метод интервалов.

Не умаляя роли других классов уравнений и неравенств, а также общих методов и приемов их решения, рассмотрим методические аспекты, связанные с методикой обучения учащихся решению иррациональных неравенств.

Существует два основных подхода к решению данного типа неравенств: с использованием равносильных преобразований и без использования равносильных преобразований.

Первый подход в школьном курсе относительно иррациональных неравенств находит большее применение и распространение. Покажем его суть на примере решения двух следующих принципиально различных (хотя по виду схожих) неравенствах.

Пример 1. $\sqrt{x+2} < x-4$.

Решение данного неравенства довольно просто и сводится к последовательным преобразованиям равносильной ему системе неравенств:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x-4 \geq 0, \\ x+2 < (x-4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \geq 4, \\ x > 7, x < 2; \end{cases} \Leftrightarrow x > 7.$$

Первое неравенство системы обеспечивает возможность извлечения квадратного корня; второе неравенство – возведение обеих частей неравенства в четную степень (третье неравенство системы) с сохранением равносильности преобразований.

Гораздо большую трудность для учащихся представляет неравенство, аналогичное данному при изменении знака «меньше» на «больше».



Пример 2. $\sqrt{x+2} > x-4$.

По аналогии с первым примером большинство школьников решают верно следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x-4 \geq 0, \\ x+2 > (x-4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \geq 4, \\ 2 < x < 7; \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x < 7.$$

После чего чаще всего записывается полученное решение данной системы, которое выдается за ответ исходного неравенства. Однако это неверно: здесь мы теряем целую серию ответов, которая представляет собой промежуток $-2 \leq x < 4$. Действительно, возьмем, например $x = -1$ получим верное числовое неравенство $1 > -5$, что уже указывает на ошибочность ответа к исходному неравенству.

На каком же этапе теряется указанная серия ответов? Ответ для учащихся становится очевидным, если принять во внимание, что условие не отрицательности выражения $x-4$ мы использовали для корректного применения теоремы о возведении обеих частей неравенства в четную степень. Но такое ограничение введено нами искусственно лишь для применения известного приема. Тогда следует рассмотреть и случай, когда выражение $x-4$ принимает отрицательные значения. Но, учитывая, что левая часть неравенства на области определения принимает лишь неотрицательные значения, можно сделать вывод об истинности исходного неравенства при одновременном выполнении двух условий

$$x-4 < 0 \text{ и } x-4 \geq 0, \text{ т.е. системы неравенств: } \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x-4 < 0. \end{cases}$$

Решением данной системы и будет являться промежуток $-2 \leq x < 4$. Его объединение с решением первой системы $4 \leq x < 7$ дает в итоге решение исходного неравенства, которое представляет собой промежуток $-2 \leq x < 7$.

Обобщая приведенные рассуждения, следует выделить два «стандарта»

при решении иррациональных неравенств: $\sqrt{f(x)} < g(x)$ и $\sqrt{f(x)} < g(x)$ (при этом случаи нестрогих неравенств не вносят принципиальных различий).

Решение первого неравенства сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Решение второго неравенства сводится к объединению решений следующих двух систем:



$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Подводя промежуточный итог, отметим, что решение других, более сложных иррациональных неравенств, связано, в первую очередь, с преобразованиями общими для всех классов неравенств и в большинстве случаев представляет собой решение двух рассмотренных нами типов иррациональных неравенств. Однако надо помнить, что безотчетное следование алгоритму может привести к решению более сложному, а иногда и недоступному на уровне школьной программы. Поэтому учителю следует требовать от учащихся обоснования всех производимых ими действий при решении того или иного неравенства, а также показывать школьникам рациональные способы и методы их решения. Одним из таких методов является метод интервалов, который широко используется при решении целых рациональных и дробно-рациональных неравенств и незаслуженно не рассматривается при решении других видов неравенств (одной из причин этого является то, что свое обоснование он получает в старшей школе при изучении начал математического анализа).

Метод интервалов, рассматриваемый нами далее, относится ко второму подходу решения иррациональных неравенств, который не предполагает использование равносильных преобразований.

Сформулируем вначале этапы применения метода интервалов по отношению к неравенству с одной переменной безотносительно того, рациональное оно или иррациональное (здесь уместно и выражение «алгебраическое оно или трансцендентное»):

1. Привести исходное неравенство (если необходимо) к вид $f(x) > 0$ (знак неравенства может быть другим: “<”, “≤” или “≥”; существенное значение имеет то, что в левой части неравенства стоит некоторая непрерывная в своей области определения функция, а в правой – ноль).

2. Найти область определения функции $y = f(x)$.

3. Найти нули функции $y = f(x)$ в области ее непрерывности (т.е. корни уравнения $f(x) = 0$) и точки разрыва (если они существуют).

4. Нанести с учетом области определения на числовую ось полученные точки (масштаб можно нарушить, т.к. для решения неравенства важен лишь порядок расположения, а не истинные расстояния между отмечаемыми точками). Полезно нули функции в случае нестрого неравенства отмечать заштрихованным кругом, в случае строго неравенства – окружностью, точки разрыва – окружностью; граничные точки области определения в случае



возможности нахождения в них значения функции $y = f(x)$ – отмечать в соответствии с выполнением истинности неравенства в каждой такой точке.

5. На каждом из интервалов, полученных на числовой оси, определить знак функции $y = f(x)$ и поставить его над этим интервалом (знак определяется подстановкой произвольно выбранных наиболее удобных значений x из каждого интервала или используя свойство непрерывной функции о перемене знака).

6. Выбрать нужные по условию интервалы (и/или точки) и записать ответ.

Как видим, выделенные этапы совпадают с этапами решения рациональных неравенств с той лишь разницей, что здесь необходимо учитывать область определения неравенства. А поскольку большинство учащихся с решением рациональных неравенств методом интервалов справляются достаточно уверенно, то целесообразно при обучении их применению метода интервалов к решению иррациональных неравенств использовать аналогию.

Заметим в заключение, что, рассматривая в данной статье методику решения иррациональных неравенств, мы уделили внимание лишь третьему этапу в структуре общего приема решения. Не менее важными и интересными как с методической, так и с теоретико-математической точек зрения являются и другие этапы, в особенности, этап поиска преобразований для сведения данного уравнения или неравенства к стандартному, а также этап проверки найденного решения.

Список литературы:

1. Марасанов, А.Н. О методике обучения школьников решению иррациональных уравнений / А.Н. Марасанов // Вестник чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. – 2010. №3. – С. 127 – 134.
2. Миндюк, Н.Г. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс [Текст]: учеб. пособие для общеобразоват. организаций/ Н.Г. Миндюк, И.С. Шлыкова. – М.: Просвещение, 2017. – 239 с.
3. Мишин, В.И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика [Текст]: учеб. пособин для студентов пед. ин-тов по физ. – мат. спец./ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
4. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики [Текст]: учеб. -метод. пособие/ А.Г. Мордкович. – 2-е изд., доп. и прераб. – М.: ООО Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО Издательство «Мир и Образование», 2005. – 336 с.
5. Селезнева, К.О. Иррациональные уравнения, неравенства и их системы / К.О. Селезнева // VII Международная студенческая научно-практическая интернет-конференция



«Энергия науки» : матер. конф. – Ханты – Мансийск: Изд-во. Югорского гос. унта.
2017. – С. 794 – 798.