

УДК 512.1

ПОЛНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ

Ведерников Сергей Иванович

пенсионер

г.Москва

Аннотация. Великая теорема Ферма доказана двадцать лет назад. Как показал С. Сингх [1], от Пифагора до П. Ферма, от П. Ферма до Э. Уайлса знаменитое уравнение развивало математику. Казалось бы, тема закрыта, но многим, не только математикам, не даёт покоя тот факт, что ещё в 1637 году Пьер Ферма заявил, что нашёл «удивительное» решение своей теоремы, несмотря на то, что математические знания того времени были далеки от знаний нашего времени. В предлагаемой работе на базе школьных знаний показана невозможность разложения на целочисленные множители в уравнении при $n > 2$. Это значит, что теорема Ферма не имеет целочисленных решений.

Ключевые слова: великая, теорема, Ферма, метод деления.

Теорема: для целого натурального числа $n > 2$ уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ не имеет решений в целых положительных числах X, Y, Z .

Доказательство.

Имеется $X^n + Y^n = Z^n$, где X, Y, Z, n - натуральные положительные числа. $Z > X > Y$ - взаимно простые числа, $n > 2$.

Исходя из того, что уравнение $X^2 + Y^2 = Z^2$ является частным случаем уравнения $X^n + Y^n = Z^n$ и в нём выделяются целочисленные значения X, Z и Y , можно утверждать, что если уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ при $n > 2$ не имеет целочисленных множителей для X^n или Z^n , то оно не имеет решений в целых положительных числах.

Рассмотрим порядок выделения множителей числа Y^n и целочисленных Z, X на примере Пифагоровой тройки (5; 12; 13). [2]

$$\text{Имеем: } X^2 + Y^2 = Z^2 \leftrightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2.$$

$$\text{Преобразуем выражение: } Z^2 - X^2 = Y^2 \leftrightarrow 13^2 - 5^2 = 12^2. (1)$$

$$\text{Разложим ф. (1) на множители: } Z + X = Y_1 \leftrightarrow 13 + 5 = 18; (2)$$

$$Z - X = Y_2 \leftrightarrow 13 - 5 = 8. (3)$$

Сложим почленно ф. (2) и ф. (3):

$$2 \cdot Z = Y_1 + Y_2 \leftrightarrow 18 + 8 = 26; \text{ откуда } Z = \frac{Y_1 + Y_2}{2} = \frac{2(9+4)}{2} = 13. \quad (4)$$

$$\text{Вычтем почленно ф. (3) из ф. (2): } 2 \cdot X = Y_1 - Y_2 \leftrightarrow 18 - 8 = 10;$$

$$\text{откуда: } X = \frac{Y_1 - Y_2}{2} = \frac{2(9-4)}{2} = 5. \quad (5)$$

Из ф. ф. (2) и (3), а также из ф. ф. (4) и (5) видно, что в случае $n = 2$ уравнения $X^n + Y^n = Z^n$ возможно выделение целочисленных множителей Y^n и целочисленных значений X и Z .

Произведём разложение на множители в уравнении $X^n + Y^n = Z^n$ при $n > 2$. Есть общий случай и три частных, как дополнение к общему. Посыл общий для всех случаев: чётное число, имеющее множителем 2^n , при $n \geq 3$, можно представить разностью квадратов двух нечётных чисел.

Известно, что Z в исходном уравнении при чётном n не может быть чётным числом, а X и Y одновременно нечётными, поэтому примем Z , X - нечётными числами, Y - чётным числом, поскольку принципиальной разницы между X и Y в данном случае нет. Доказательство невозможности чётного Z при нечётном n см. ниже Случай 3.

Рассмотрим «Общий случай» доказательства.

$$\text{Имеем: } X^n + Y^n = Z^n. \quad (1)$$

Возведём левую и правую части формулы в квадрат.

$$X^{2n} + 2 \cdot X^n \cdot Y^n + Y^{2n} = Z^{2n}.$$

Преобразуем полученную формулу следующим образом:

$$Z^{2n} - X^{2n} = Y^{2n} + 2 \cdot X^n \cdot Y^n = Y^n \cdot (Y^n + 2 \cdot X^n). \quad (2)$$

Разложим ф. (2) на множители.

$$Z^n + X^n = Y^n + 2 \cdot X^n; \quad (3)$$

$$Z^n - X^n = Y^n. \quad (4)$$

(Следует заметить, что ф. (3) можно получить, прибавив $2 \cdot X^n$ к левой и правой частям формулы (4)).

В соответствии с ф. ф. (4) и (5) (См. ниже Случай 1) множители Y^n и $(Y^n + 2 \cdot X^n)$ формулы (2) не могут иметь общих множителей, кроме одного числа 2, исходя из условия о взаимно простых X , Y , Z . Рассмотрим всё же этот момент отдельно.

Запишем ф. (3) и ф. (4) следующим образом:

$$Z^n + X^n = 2 \cdot (2^{(n-1)} \cdot Y_1^n + X^n);$$

$$Z^n - X^n = 2^n \cdot Y_1^n.$$

Примем условно $2^{(n-1)} \cdot Y_1^n + X^n = Y_2^n$, где Y_2^n целое нечётное число в степени п.

Итак: $Z^n + X^n = 2 \cdot Y_2^n$; (5) $Z^n - X^n = 2^n \cdot Y_1^n$. (6)

Из почленного сложения ф. (5) и ф. (6) имеем:

$$2 \cdot Z^n = 2 \cdot Y_2^n + 2^n \cdot Y_1^n \text{ или } Z^n = 2 \cdot \frac{Y_2^n + 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n}{2}; Z^n = Y_2^n + 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n. (7)$$

Из почленного вычитания ф. (6) из ф. (5) имеем:

$$2 \cdot X^n = 2 \cdot Y_2^n - 2^n \cdot Y_1^n \text{ или } X^n = 2 \cdot \frac{Y_2^n - 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n}{2}; X^n = Y_2^n - 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n. (8)$$

Из ф. ф. (7) и (8) видно, что условия о взаимной простоте Z и X выполнимо только при отсутствии общих множителей в числах Y_2^n и $2^{(n-1)} \cdot Y_1^n$.

Поэтому множители этих чисел должны быть в степени п. (Или целое Y_2^n должно быть п – ой степенью дробного числа.)

Рассмотрим этот момент на примере разложения на множители пифагоровой тройки (5; 12; 13), где $Z = 13$, $X = 5$, $Y = 12$.

Как показано в Случае 1 (См. ниже после ф. ф. (2) и (3)) сумма и разность двух нечётных чисел, числа чётные, но одно из них имеет множителем только одно число 2, а другое – минимум 2^2 , в общем же случае 2^{n-1} при $n > 2$.

Разложение формулы $Z^n - X^n = Y^n$ при чётном п выглядит так:

$$Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = Y^m \text{ и } Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = Y^{n-m}.$$

Для разности квадратов пифагоровой тройки (5; 12; 13) разложение такое.

$$\text{Имеется: } X^2 + Y^2 = Z^2 \leftrightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2. (1a)$$

Преобразуем ф. (1a).

$$Z^2 - X^2 = Y^2 \leftrightarrow 13^2 - 5^2 = 12^2. (2a)$$

Разложим на множители ф. (2a).

$$Z + X = 2 \cdot Y_1^2 \leftrightarrow 13 + 5 = 18; (3a)$$

$$Z - X = 2^{(2-1)} \cdot Y_2^2 = 2 \cdot Y_2^2 \leftrightarrow 13 - 5 = 8. (4a)$$

Число 18 ф. (3a) содержит только одно число 2, а число 8 ф. (4a) имеет вид 2^3 .

Следовательно, весь чётный сомножитель числа $12^2 = 144$ составляет $2^4 = 2^2 \cdot 2^2 = 4^2 = 16$. Т. е. одно число 4 разделено пополам между числом 18 и числом 8.

Поделив 18 и 8 на 2, имеем $9 = 3^2$ и $4 = 2^2$.

Это значит, что вторыми множителями чисел 18 и 8, кроме числа 2, являются квадраты чисел. Причём это свойство всех пифагоровых троек.

Рассмотрим ф. (5) как аналог ф. (3).

$$Z^n + X^n = Y^n + 2 \cdot X^n; (3) Z^n + X^n = 2 \cdot Y_2^n. (5)$$

Нами условно принято, что Y_2^n является n – ой степенью целого нечётного числа, в противном случае уравнение (1) не имеет решения в целых числах. На анализе ф. (3а) и ф. (4а) разложения пифагоровой тройки (5, 12, 13) можно заключить, что сомножитель правой части ф. (2) $2 \cdot Y_2^n$ имеет в некоторых случаях, как и в уравнении $X^2 + Y^2 = Z^2$, целочисленные значения Y_2 . Следовательно, можно предположить, что уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ может иметь целочисленные решения.

Однако перемножим левые и правые части ф. ф. (5) и (6).

$$Z^{2n} - X^{2n} = 2 \cdot Y_2^n \cdot Y^n = 2 \cdot (Y_2^n \cdot Y^n). (9)$$

Примем чётное, имеющее множителем 2^n , где $n \geq 3$, число $Y_2^n \cdot Y^n$ как Y_3^n . А любое чётное число, имеющее множитель 2^n при $n > 2$, можно представить разностью квадратов двух нечётных чисел.

$$\text{Запишем ф. (9) следующим образом: } Z^{2n} - X^{2n} = 2 \cdot Y_3^n. (10)$$

Поскольку числа Y^{2n} и X^{2n} являются квадратами чисел Z^n и X^n , то в левой части имеется разность квадратов нечётных чисел, а в правой – результат, который должен раскладываться на целые множители в соответствии с левой частью.

Выразим число Y_3^n разностью квадратов чисел А и В.

$$Y_3^n = A^2 - B^2.$$

Формула (10) примет вид:

$$Z^{2n} - X^{2n} = 2 \cdot (A^2 - B^2) = (2 \cdot A^2 - 2 \cdot B^2).$$

Разложим на множители её левую и правую части.

$$(Z^n - X^n)(Z^n + X^n) \neq (\sqrt{2} \cdot A - \sqrt{2} \cdot B)(\sqrt{2} \cdot A + \sqrt{2} \cdot B). (11)$$

Как видно из ф. (11) целочисленные значения её левой части не соответствуют результатам разложения правой части, поскольку правую часть ф. (10) невозможно разложить на целочисленные множители. Отсюда следует, что уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ не имеет решения в целых числах при целочисленном Y_3 . (См. формулу (10).)

Снова рассмотрим формулу (9).

$$Z^{2n} - X^{2n} = 2 \cdot Y_2^n \cdot Y^n = 2 \cdot (Y_2^n \cdot Y^n), \text{ где } Y_2^n \cdot Y^n = Y_3^n.$$

Предположим, что Y_2 , а тем самым и Y_3 не являются целыми числами.

По аналогии со случаем $X^2 + Y^2 = Z^2$ можно бы заключить, что уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ и тогда не имеет решений, но рассмотрим этот момент отдельно.

Запишем ф. (9) по-другому, приняв $Y_2^n = k$, где k - целое, нечётное число.

$$Z^{2n} - X^{2n} = 2 \cdot k \cdot Y^n. \quad (9a)$$

Поскольку Y^n можно выразить разностью квадратов, то запишем его как $Y^n = (A_1^2 - B_1^2)$.

Тогда ф. (9a) примет вид:

$$(Z^n - X^n)(Z^n + X^n) = 2 \cdot k \cdot (A_1^2 - B_1^2) = (2 \cdot k \cdot A_1^2 - 2 \cdot k \cdot B_1^2). \quad (9b)$$

Разложим правую часть ф.(9b) на множители.

$$(Z^n - X^n)(Z^n + X^n) \neq (\sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot A_1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot B_1)(\sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot A_1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot B_1). \quad (9c)$$

Из ф. (9c) следует, что правую часть ф. (9a) невозможно разложить на целочисленные множители и при целом $\sqrt{k}$, и при иррациональном, поскольку k – нечётное число. Следовательно, уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ и в этом случае не имеет целочисленных решений.

Рассмотрим ф. (9a) в следующей позиции.

Имеем: $Z^{2n} - X^{2n} = 2 \cdot k \cdot Y^n$. Выразим $Y^n = 2^n \cdot Y_0^n$ при $n \geq 3$.

В данном случае $2^n \cdot Y_0^n$ можно выразить разностью квадратов двух нечётных чисел. Тогда разложение ф. (9a) будет соответствовать ф. (9b) и ф. (9c). Т. е. с отсутствием целочисленных решений.

При $n = 2$ ф. (9a) будет выглядеть так:

$$Z^4 - X^4 = 2 \cdot k \cdot 2^2 \cdot Y_0^2 = 2^3 \cdot k \cdot Y_0^2.$$

Выразим $2^3 \cdot k \cdot Y_0^2$ разностью квадратов нечётных чисел.

$$2^3 \cdot k \cdot Y_0^2 = (A_2^2 - B_2^2).$$

Тогда ф. (9a) будет такой: $Z^4 - X^4 = A_2^2 - B_2^2$. Следовательно, уравнение $X^2 + Y^2 = Z^2$ может иметь решения в целых числах.

Приведённое доказательство является приемлемым, для всех трёх частных случаев «Полного доказательства Великой теоремы Ферма методом деления».

Рассмотрим первый случай, когда $n > 2$ чётное число.

Случай 1. Z, X - нечётные, Y - чётное, n - чётное.

Имеется: $X^n + Y^n = Z^n$.

Преобразуем исходное уравнение:

$$Z^n - X^n = Y^n. (1)$$

Разложим на множители ф. (1). $Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = Y^{(n-m)}$. (2) $Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = Y^m$. (3)

Хотя абзац после ф.(5) разъясняет суть разложения на ф.(2) и ф. (3), поясним всё же этот момент. Сумма двух нечётных чисел и разность этих же чисел - числа чётные, но одно из них имеет множителем только одно число 2, другое - множителем 2^2 , а в общем случае $2^{(n-1)}$. Разложение на множители $Z^n - X^n = Y^n$ при чётном $n = 2k$ соответствует ф.(2) и ф.(3), но имеются два случая: когда $Y^{(n-m)}$ имеет множитель 2, а Y^m множитель $2^{(n-1)}$, и когда $Y^{(n-n)}$ имеет множитель $2^{(n-1)}$, а Y^m только один множитель 2. Вариантов разложения может быть несколько, но все они соотносятся с этими двумя случаями, отдельно друг от друга рассмотренными в Случай 1. (См. ф. (6) и ф. (13)).

Из почленного сложения ф. (2) и ф. (3) имеем:

$$2 \cdot Z^{\frac{n}{2}} = Y^{(n-m)} + Y^m; Z^{\frac{n}{2}} = \frac{Y^{(n-m)} + Y^m}{2}; (4)$$

а из почленного вычитания ф. (3) из ф. (2) имеем:

$$2 \cdot X^{\frac{n}{2}} = Y^{(n-m)} - Y^m; X^{\frac{n}{2}} = \frac{Y^{(n-m)} - Y^m}{2}. (5)$$

Из ф. ф. (4) и (5) видно, что при соблюдении условия о нечётности Z и X необходимо, чтобы одно из чётных чисел $Y^{(n-m)}$ или Y^m имело множителем только одно число 2. Тогда другое число должно иметь множителем $2^{(n-1)}$, поскольку Y^n - число чётное и имеет множителем минимум одно число 2^n . При этом $Y^{(n-m)}$ и Y^n не могут иметь общих множителей, кроме оговорённых выше кратных 2, поскольку в противном случае такие множители должны иметь также Z^n и X^n , что противоречит условию о взаимной простоте Z, X и Y .

Поэтому $Y^{(n-m)}$ и Y^m должны состоять из различных множителей числа Y^n в той же степени, в степени n , если исходить из предположения, что исходное уравнение имеет целочисленные решения.

Поскольку из ф. (4) и ф. (5) следует, что одно из чисел $Y^{(n-m)}$ или Y^m должно иметь множителем только одно число 2, а оба должны быть в степени n, то примем ф. (2) и ф. (3) в виде: $Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_1^n$; (6) $Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = 2^{(n-1)} \cdot Y_2^n$; (7) имея в виду, что Y_1^n - число нечётное.

Из ф. ф. (4) и (5) выразим значение $Z^{\frac{n}{2}}$ и $X^{\frac{n}{2}}$, подставив вместо $Y^{(n-m)}$ значение $2 \cdot Y_1^n$, а вместо Y^m значение $2^{(n-1)} \cdot Y_2^n$.

$$Z^{\frac{n}{2}} = \frac{2 \cdot Y_1^n + 2^{(n-1)} \cdot Y_2^n}{2} = Y_1^n + 2^{(n-2)} \cdot Y_2^n; \quad (8)$$

$$X^{\frac{n}{2}} = \frac{2 \cdot Y_1^n - 2^{(n-1)} \cdot Y_2^n}{2} = Y_1^n - 2^{(n-2)} \cdot Y_2^n. \quad (9)$$

Поскольку $X^{\frac{n}{2}}$ является степенью числа X при чётном $n \geq 4$, то его можно разложить на множители. Разложим выражение (9) на множители по формуле для разности n-х степеней.

$$X^{\frac{n}{2}} = (Y_1 - \sqrt[n]{2^{(n-2)} \cdot Y_2}) \cdot (Y_1^{(n-1)} + \dots + 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{n}} \cdot Y_2^{(n-1)}). \quad (10)$$

Очевидно, что $X^{\frac{n}{2}}$ невозможно разложить на целочисленные множители по формуле разности n - х степеней.

Рассмотрим ф. (6) и ф. (7), которые удовлетворяют разложению на множители разности квадратов двух чисел при чётном $n > 3$. $Z^n - X^n = Y^n$. Y^n - чётное.

$$Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_1^n; \quad (6) \quad Y_1^n - \text{нечётное.} \quad Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = 2^{(n-1)} \cdot Y_2^n; \quad (7)$$

Нужно заметить, что разложение на множители формулы $Z^2 - X^2 = Y^2$, соответствующее «пифагоровым тройкам», где Y^2 - чётное число, даёт результатом один множитель, содержащий только одно число 2, а другой множитель кратен числу 8, при этом чётное число этих троек кратно именно числу 4.

Рассмотрим разложение на множители ф. (7) при показателе n кратном 4 для иллюстрации «Общего случая доказательства».

Формула (7), на первый взгляд, тоже может удовлетворять условию кратности числу 8, однако преобразуем её правую часть. Преобразуем $2^{(n-1)} \cdot Y_2^n$ следующим образом:

$$2^{(n-1)} \cdot Y_2^n = \frac{2^n \cdot Y_2^n}{2} = \frac{Y_3^n}{2}.$$

Выразим Y_3^n разностью квадратов двух нечётных чисел, поскольку чётное число, имеющее множителем 2^2 при $n > 2$, можно хотя бы один раз представить такой разностью, где

первый множитель разложения разности квадратов, имеет только один множитель 2, а второй – множитель $2^{(n-1)}$.

$$\text{Пусть: } Y_3^n = A^2 - B^2.$$

$$\text{Тогда: } \frac{Y_3^n}{2} = \frac{A^2 - B^2}{2} = \frac{A^2}{2} - \frac{B^2}{2}. \quad (11)$$

Разложим ф. (11) на множители:

$$\frac{A^2}{2} - \frac{B^2}{2} = \left(\frac{A}{\sqrt{2}} - \frac{B}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}}\right). \quad (12)$$

$$Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = (Z^{\frac{n}{4}} - X^{\frac{n}{4}})(Z^{\frac{n}{4}} + X^{\frac{n}{4}}) \neq \left(\frac{A}{\sqrt{2}} - \frac{B}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}}\right), \quad (12a)$$

Из ф. (12) и (12a) можно сделать вывод, что ф. (7), а также уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ при чётном n , кратном 4, не имеет решения в целых числах.

$$\text{Допустим: } Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = 2^{(n-1)} \cdot Y_4^n; \quad (13) \qquad Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_5^n. \quad (14)$$

Очевидно, что ф. (14) не имеет целочисленных решений при n кратных 4, поскольку левая часть уравнения имеет множителем минимум 2^3 , а правая только 2 при нечётном Y_5^n .

Доказано, что корень k из целого числа является рациональным числом только тогда, когда число под корнем является k -ой степенью другого целого числа, в остальных случаях такой корень иррациональное число. [3] Поэтому $\sqrt[n]{2^{(n-2)}}$ - число иррациональное, поскольку другим, меньшим 2^n , может быть только 1.

Следовательно, опираясь на ф. (10), ф. (16) и результаты разложения правых частей ф. (7) и ф. (13), можно заключить, что $X^{\frac{n}{2}}$ невозможно разложить на целочисленные множители, и уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ при чётном $n > 2$ не имеет решения в целых положительных числах.

При этом особо нужно отметить, что для $\sqrt[n]{2^{(n-2)}} = 2^{\frac{(n-2)}{n}}$ при нечётном $\frac{n}{2} = 2k+1$, характерен следующий ряд показателей: $\frac{(n-2)}{n} \frac{0}{2}; \frac{4}{6}; \frac{8}{10}; \frac{12}{14}; \frac{16}{18}; \frac{20}{22} \dots$, где первый показатель - $\frac{0}{2}$ соответствует уравнению $X^2 + Y^2 = Z^2$ при $2^{\frac{0}{2}} = \sqrt{2^0} = \sqrt{1} = 1$, что делает возможным его целочисленные решения при невозможности таковых для остального ряда показателей.

Случай 2. Z ; X - нечётные, Y - чётное, n - нечётное. Имеем: $X^n + Y^n = Z^n$.

Возведём левую и правую часть исходной формулы в квадрат.

$$X^{2n} + 2 \cdot X^n \cdot Y^n + Y^{2n} = Z^{2n}.$$

Преобразуем полученную формулу следующим образом:

$$Z^{2n} - X^{2n} = Y^{2n} + 2 \cdot X^n \cdot Y^n = Y^n(Y^n + 2 \cdot X^n). \quad (1)$$

Разложим ф. (1) на множители.

$$Z^n + X^n = Y^n + 2 \cdot X^n; \quad (2)$$

$$Z^n - X^n = Y^n. \quad (3)$$

Y^n - чётное число, поэтому выразим его как $2^n \cdot Y_1^n$.

Запишем ф. (2) и ф. (3) следующим образом:

$$Z^n + X^n = 2 \cdot (2^{(n-1)} \cdot Y_1^n + X^n);$$

$$Z^n - X^n = 2^n \cdot Y_1^n.$$

Примем $Z^n + X^n = 2 \cdot (2^{(n-1)} \cdot Y_1^n + X^n)$ в виде $Z^n + X^n = 2 \cdot Y_2^n$, при нечётном Y_2^n , поскольку целое положительное число можно выразить n -ой степенью другого положительного числа.

Итак, имеем:

$$Z^n + X^n = 2 \cdot Y_2^n; \quad (4)$$

$$Z^n - X^n = 2^n \cdot Y_1^n. \quad (5)$$

(См. Общий случай для ф.ф. (4) и (5).)

Сложим почленно ф. ф. (4) и (5).

Откуда:

$$2 \cdot Z^n = 2 \cdot Y_2^n + 2^n \cdot Y_1^n, \text{ или}$$

$$Z^n = 2 \cdot \frac{Y_2^n + 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n}{2};$$

$$Z^n = Y_2^n + 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n. \quad (6)$$

Вычтем почленно из ф. (4) ф. (5).

$$2 \cdot X^n = 2 \cdot Y_2^n - 2^n \cdot Y_1^n.$$

$$X^n = 2 \cdot \frac{Y_2^n - 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n}{2};$$

$$X^n = Y_2^n - 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n. \quad (7)$$

Из ф. ф. (6) и (7) видно, что Y_2^n и Y_1^n не могут иметь общих множителей при сохранении условия о взаимной простоте Z, X, Y ; а ф. (6) и ф. (7), т. е. Z^n и X^n , можно разложить на множители по формулам разложения на множители разности n -х и суммы n -х степеней при нечётном $n=2k+1$.

Разложим на множители $\Phi(6)$ и $\Phi(7)$.

$$Z^n = (Y_2 + \sqrt[n]{2^{(n-1)}} \cdot Y_1)(Y_2^{(n-1)} - \dots + 2^{\frac{(n-1)^2}{n}} \cdot Y_1^{(n-1)}); \quad (8)$$

$$X^n = (Y_2 - \sqrt[n]{2^{(n-1)}} \cdot Y_1)(Y_2^{(n-1)} + \dots + 2^{\frac{(n-1)^2}{n}} \cdot Y_1^{(n-1)}). \quad (9)$$

Итак, X^n нельзя разложить на целочисленные множители, а значит уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ не имеет решений в целых положительных числах при нечётном $n \geq 3$.

Случай 3.

$X > Y$ - нечётные, Z - чётное, n - нечётное.

Кроме известного доказательства, что Z в уравнении $X^n + Y^n = Z^n$ не может быть чётным числом при чётном n , заключающемся в неравенстве суммы квадратов двух нечётных чисел и квадрата чётного числа, возможно ещё одно доказательство этого случая.

Имеется:

$$X^n + Y^n = Z^n. \quad (1)$$

Вычтем из левой и правой частей уравнения (1) $2 \cdot Y^n$.

$$X^n - Y^n = Z^n - 2 \cdot Y^n; \text{ где}$$

$$Z^n - 2 \cdot Y^n = 2^n \cdot Z_1^n - 2 \cdot Y^n = 2 \cdot (2^{(n-1)} \cdot Z_1^n - Y^n);$$

с нечётным $(2^{(n-1)} \cdot Z_1^n - Y^n) = a$.

Тогда:

$$X^n - Y^n = 2 \cdot a. \quad (2)$$

Поскольку n чётное по условию, то $X^n - Y^n$ можно разложить, как разность квадратов.

Пусть $X^{\frac{n}{2}} + Y^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot b$, а $X^{\frac{n}{2}} - Y^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot c$, поскольку X и Y нечётные числа.

Тогда:

$$X^n - Y^n = 2 \cdot b \cdot 2 \cdot c = 4 \cdot b \cdot c. \quad (3)$$

Сравним $\Phi(2)$ и $\Phi(3)$.

$2 \cdot a = 4 \cdot b \cdot c$; или $a \neq 2 \cdot b \cdot c$, т. к. a - нечётное число.

Итак: доказано, что Z в уравнении $X^n + Y^n = Z^n$ не может быть чётным числом при чётном $n \geq 4$ и целочисленных решениях уравнения.

Рассмотрим доказательство невозможности чётного Z при нечётном n .

$X > Y$ - нечётные, Z - чётное, n - нечётное.

Преобразуем уравнение $X^n + Y^n = Z^n$, вычтя из левой и правой его частей $2 \cdot Y^n$.

Имеем:

$$X^n - Y^n = Z^n - 2 \cdot Y^n = 2 \cdot (2^{(n-1)} \cdot Z_1^n - Y^n). \quad (4)$$

Отметим, что $(2^{(n-1)} \cdot Z_1^n - Y^n)$ - нечётное число.

$$\text{Примем } 2^{(n-1)} \cdot Z_1^n - Y^n = Z_2^n.$$

Тогда ф.(4) примет вид:

$$X^n - Y^n = 2 \cdot Z_2^n. \quad (5)$$

Представим уравнение (1) и уравнение (5) в качестве сомножителей разности квадратов X^n и Y^n :

$$(X^n + Y^n)(X^n - Y^n) = X^{2n} - Y^{2n} = 2 \cdot Z_2^n \cdot Z^n = 2 \cdot (Z_2 \cdot Z)^n. \quad (6) \quad (\text{См. Общий случай.})$$

Произведём почленное сложение и вычитание уравнения (1) и уравнения (5), откуда имеем:

$$2 \cdot X^n = Z^n + 2 \cdot Z_2^n.$$

Выразим $Z^n = 2^n \cdot Z_3^n$. Тогда:

$$X^n = \frac{Z^n + 2 \cdot Z_2^n}{2} = 2 \cdot \frac{2^{(n-1)} \cdot Z_3^n - Z_2^n}{2} = 2^{(n-1)} \cdot Z_3^n + Z_2^n; \quad (7)$$

$$2 \cdot Y^n = Z^n - 2 \cdot Z_2^n;$$

$$Y^n = \frac{Z^n - 2 \cdot Z_2^n}{2} = 2 \cdot \frac{2^{(n-1)} \cdot Z_3^n - Z_2^n}{2} = 2^{(n-1)} \cdot 2 \cdot Z_3^n - Z_2^n. \quad (8)$$

Разложим ф. (7) по формуле разложения на множители суммы $n - x$ степеней при нечётном n .

$$X^n = 2^{(n-1)} \cdot Z_3^n + Z_2^n = \left(\sqrt[n]{2^{(n-1)}} \cdot Z_3 + Z_2 \right) \left(2^{(n-1)^2} \cdot Z_3^{(n-1)} - \dots + Z_2^{(n-1)} \right). \quad (9)$$

Разложим ф. (8) на множители по формуле разложения на множители разности $n - x$ степеней, имея в виду, что Y^n нечётное число.

$$Y^n = 2^{(n-1)} Z_3^n - Z_2^n = \left(\sqrt[n]{2^{(n-1)}} \cdot Z_3 - Z_2 \right) \left(2^{\frac{(n-1)^2}{n}} Z_3^{(n-1)} + \dots + Z_2^{(n-1)} \right). \quad (10)$$

Из ф.ф. (9) и (10) следует, что разложение X^n и Y^n на целочисленные множители невозможно, а значит Z не может быть чётным числом в уравнении (1), поскольку уравнение не имеет целочисленных решений.

Общий вывод: для рационального числа $n \geq 3$ уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ не имеет решений в целых положительных числах X, Y, Z .

Список литературы:

1. Сингх С. Великая теорема Ферма. М.: МЦИМО, 2000 г.
2. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М.: Учпедгиз, 1959 г.
3. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: учебное пособие. М.: Высшая школа, 1984 г.