

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЙ В СЛУЧАЙНЫХ СЕТЯХ

Оганесян Минас Генрикович

кандидат технических наук, ассистент

Кочарян Ани Гагиковна

кандидат технических наук, ассистент

Хечоян Хачатур Сагателович

студент

Ереванский государственный университет, г. Ереван

Аннотация. Данная работа посвящена систематическому исследованию режимов поведения случайных сетей при наличии в них возбуждений. Подобные исследования на случайных сетях являются отправной точкой для дальнейших исследований более сложных сетевых структур и их режимов поведения. Такие структуры, в свою очередь, представляют большой интерес поскольку способны моделировать различные биологические объекты и процессы, протекающие в них, в частности – головной мозг человека.

Ключевые слова: случайные сети, распространение возбуждений, режим гашения, режим неустойчивого горения, режим устойчивого горения.

Введение. Попытки понять, как организованы и как функционируют сложные биологические системы, определяют сейчас основное направление развития наук о живом, в которое активно вовлекаются физика и компьютерное моделирование. В последнее десятилетие внимание исследователей, работающих в этой междисциплинарной области, смещается в сторону моделей с так называемым "критическим поведением", или кратко – с "критичностью". В физике, такие модели хорошо известны и широко используются для описания коллективных эффектов, скачкообразно меняющих физическое состояние системы при достижении некоторых (критических) значений управляющих параметров. Банальным примером термодинамической критичности являются фазовые переходы I-го и II-го рода, характеризующиеся критической температурой перехода. Примером кинетической критичности может служить воспламенение горючей смеси, которое характеризуется порогом зажигания (критическим соотношением параметров распространения и гашения пламени), ниже которого смесь не воспламеняется, но воспламеняется выше порога. Важно, что вдали от критического порога система ведет себя динамически "жестко", т.е. на фазовом пространстве системы имеются сильные аттракторы с большой областью притяжения, а флуктуации играют несущественную роль. Однако вблизи критического порога ситуация принципиально другая. Здесь все аттракторы, если они есть,

слабые, а флуктуации, напротив, сильные, и эффекты самоорганизации, главным образом, определяются "мягкими" кооперативными модами, формирующимися "на границе хаоса".

Именно такие представления доминируют сейчас в системной биологии, например, в задачах моделирования системы экспрессии генов [1] или многофакторной оптимизации клеточного роста [2, 3]. Особенно впечатляющими на этом поле выглядят исследования функциональной активности мозга [4], позволяющие думать, что мозг, как система нейронов, всегда работает в условиях критичности.

Понятно, что критичность систем нейронов можно моделировать в терминах распространения по сети некоторой активности. И понятно, что так же, как и в случае воспламенения горючей смеси, процесс распространения активности может характеризоваться некоторыми критическими параметрами. Однако в отличие от классических кинетических моделей, важным фактором здесь является топология сети [5], и вопрос о том, как именно топология сети влияет на поведение системы вблизи критических порогов зажигания, оказывается одним из центральных. Хотя в литературе имеется целый ряд моделей распространения активности в сетях, в том числе, и сетях, моделирующих коннектомы мозга, распространение активности вблизи порога возбуждения остается не до конца проясненным даже для случайной сети Эрдёша-Реньи. Следует подчеркнуть, что случайная сеть не является удовлетворительной моделью нервной системы организмов [6], однако может служить, и часто служит тем реперным объектом, с которым сравниваются характеристики функциональной активности реальных коннектомов.

В данной работе мы приводим результаты систематических исследований процесса распространения активности в случайной сети Эрдёша-Реньи при прохождении критического порога воспламенения. В отличие от исследований подобного рода, основное внимание нашего исследования привлечено именно к режиму неустойчивого горения, в котором траектории активации характеризуются высокой терминальностью и определение самого порога активации требует детализации.

Модель распространения возбуждений в случайных сетях. Случайная сеть (далее просто сеть) может быть представлена неориентированным графом $G = (V, E)$, где $V = \{x_1, \dots, x_N\}$ непустое конечное множество вершин (далее узлов), и E - конечное множество неупорядоченных пар различных элементов из V - ребер (далее связей). Каждый узел $x_i, i = 1 \dots N$ может находиться в одном из двух состояний - активном состоянии, если $x_i = 1$ или в пассивном состоянии, если $x_i = 0$.

Процесс начинается с некоторого начального распределения активных вершин в сети. Очевидно, что имеет смысл рассматривать только те начальные состояния, где присутствует по

крайней мере одна активная вершина. Далее, на каждом шаге процесса активные узлы посредством заданного алгоритма активизации и пассивации передают активность соседним узлам и/или теряют активность. Процесс распространения возбуждения завершается либо, когда число активных узлов в сети становится равным нулю (терминальное завершение), либо по усмотрению оператора (ограничение по числу шагов). В последнем случае процесс продолжается оператором до наступления равновесного (стабильного) состояния, т.е. когда число активных узлов незначительно изменяется (флуктуирует) на протяжении довольно большого количества шагов. В этом случае мы говорим о состоянии устойчивой активации сети.

Алгоритм распространения активности задается с помощью двух характеристик. Первая характеристика – топология распространения активности – т.е. каким вершинам передается активность и теряет ли свою активность узел. Вторая характеристика – количественная – задаёт вероятности (скорости) соответствующих процессов. Учитывая наличие двух процессов – активизации и пассивации, вторая характеристика задаётся посредством двух параметров – соответственно λ и μ . Данные параметры позволяют формализовать понятие зоны активности и её ширины, что будет сделано далее.

Процесс активации сети можно описать посредством траектории распространения возбуждений. Траектория есть функция изменения числа активных узлов во времени.

Рассмотрим простую модель, где активные узлы передают импульс активности одному из соседних узлов, и сами могут переходить в пассивное состояние. На каждом временном шаге t_i активный узел x_i с вероятностью λ активизирует соседний узел, и с вероятностью μ теряет активность. Интересным представляется случай, когда процесс распространения возбуждения зависит от топологии сети $G = (V, E)$.

Таким образом траектория $\Phi(G, L_{act}, \lambda, \mu, T)$ процесса распространения активности определяется следующими параметрами: G – входная сеть, L_{act} – список активных узлов на начальном временном шаге $t = 0$, λ – вероятность активации на единичном шаге, μ – вероятность деактивации на единичном шаге, T – число шагов. Траекторию $\Phi(G, L_{act}, \lambda, \mu, T)$ далее будем называть траекторией активации сети $G = (V, E)$. Траектория может быть, как терминальной (нулевое значение активных узлов), так и стабильной. Значение стабильной траектории Φ на конечных шагах имеют важное значение при анализе процесса распространения активности. Через $\Phi_{tail}(G, L_{act}, \lambda, \mu, T_1, T_2)$ обозначим конечный участок траектории, где T_1 – начало участка траектории, а T_2 – конец, $T_1 \ll T_2$, $T_2 = T$.

Далее используется стандартное обозначение $ER(N, p)$ для случайных сетей Эрдёша-Реньи с числом вершин, равным N с вероятностью связи p .

Процесс распространения возбуждений в сетях Эрдёша-Реньи. Существует представление, что в сетях Эрдёша-Реньи существует порог активации который удовлетворяет следующим условиям:

- 1) если $\lambda < \mu$, то равновесным состоянием является полностью неактивная сеть,
- 2) если $\lambda > \mu$, то сеть частично активируется, причем чем больше λ , тем больше активных узлов в стабильном состоянии.

То есть, существует некоторая критическая точка $\lambda = \mu$, прохождение которой означает наличие сохранения активности в сети.

Ниже приводятся экспериментальные результаты, которые показывают, что это представление некорректно. В действительности, вблизи критической точки $\lambda = \mu$ существует зона, в которой все траектории активации оказываются терминальными. Иначе говоря, в этой зоне высока вероятность возникновения состояния, в котором все узлы оказываются неактивными и соответственно в дальнейшем сеть не может быть активирована. Устойчивая активация сети наступает существенно позже, при значениях λ заметно больше μ . Таким образом, значение $\lambda = \mu$, которое считается критическим, в действительности не имеет однозначной интерпретации и требуется более тонкая оценка порога активации сети. Детальное исследование этой области приводится далее; также предлагаются более тонкие оценки порога активации.

Исследование критических зон. Рассмотрим траекторию активации $\Phi(G, L_{act}, \lambda, \mu, T)$. При изменении вероятности активации λ , наблюдается 3 различных режима поведения траектории:

- 1) **режим гашения**, траектория имеет характерный экспоненциальный спад к 0,
- 2) **режим неустойчивого горения**, траектория выходит на некоторый квазистационарный уровень, соответствующий слабой активации сети, с последующим скачкообразным обрывом,
- 3) **режим устойчивого горения**, траектория выходит на некоторый уровень стабильной активации сети.

Порог *устойчивого горения* и порог *зажигания*, определяются по значению λ , при котором осуществляется переход от одного вида траектории к другой. Через λ_s обозначим порог перехода в режим *устойчивого горения*, а через λ_f – порог *зажигания*. Исследование множества траекторий показывает, что вышеупомянутые пороги можно определять посредством среднеквадратического отклонения σ , а именно:

- 1) если нулевое значение плотности активных вершин лежит в полосе ширины 2σ около среднего значения, то траектория находится в режиме гашения,

- 2) если нулевое значение плотности активных вершин лежит в полосе ширины 4σ (вне полосы 2σ), около среднего значения, то траектория находится в режиме неустойчивого горения,
- 3) если нулевое значение плотности активных вершин лежит в полосе ширины 6σ (вне полосы 3σ), около среднего значения, то траектория находится в режиме устойчивого горения.

Мы рассматриваем траектории при различных значениях параметра активации λ и фиксированном значении вероятности деактивации μ . Для определения 3-х областей значений λ , соответствующие режиму гашения, режиму неустойчивого горения, режиму устойчивого горения, для каждого λ на стабильных хвостах траекторий вычисляется значение среднеквадратического отклонения σ . По анализу полученных результатов и определяем λ_s и λ_f .

Весь процесс анализа состоит из 3-х стадий.

- вычисление траекторий $\Phi(G, L_{act}, \lambda, \mu, T)$ для значений $\lambda > \mu$,
- вычисление для каждой траектории $\Phi_{tail}(G, L_{act}, \lambda, \mu, T_1, T_2)$ значений среднего $\langle \rho \rangle$ и среднеквадратического отклонения σ . Строим на траектории полосы, соответствующие $2\sigma, 3\sigma$ [7],
- определение зоны режима гашения, режима неустойчивого горения, режима устойчивого горения. Определение порога неустойчивого горения λ_f , порога устойчивого горения λ_s .

1-я стадия. Для определения траекторий, генерируется сеть $G = (V, E)$ и вычисляется список активных вершин L_{act} на начальном шаге. Активные вершины определяются из списка вершин V случайным образом из расчета порядка 10% от общего числа вершин. Фиксируется μ , и для каждого $\lambda > \mu$ строится траектория активизации по алгоритму описанному ниже.

Алгоритм вычисления траектории $\Phi(G, L_{act}, \lambda, \mu, T)$.

Вход: $G, L_{act}, \lambda, \mu, T$.

Шаг 1: Если в сети нет активного узла, завершить алгоритм. В противном случае перейти к шагу 2.

Шаг 2: Из списка L_{act} выбрать очередной узел x перейти к шагу 3. Если весь список пройден, перейти к шагу 6.

Шаг 3: Генерировать случайное число r из диапазона $[0, 1]$. Перейти к шагу 4.

Шаг 4: Если $r > \lambda$, то перейти к шагу 5. Если $r < \lambda$, то случайным образом выбрать один из соседей узла x . Если выбранный сосед неактивен, то активизировать его, в случае

активности, ничего не делать. Перейти к шагу 5.

Шаг 5: Генерировать случайное число $r2$ из диапазона $[0, 1]$. Если $r2 < \mu$, то деактивировать узел x . Перейти к шагу 2.

Шаг 6: Получить новый список L_{act} , посчитать плотность активных узлов ρ . Увеличить время на 1. Перейти к шагу 1.

Выход: список L_{act} для каждого шага t и плотность активных узлов ρ , что однозначно определяет траекторию активации.

Наличие списка активных узлов на выходе позволяет оператору снова запустить процесс на продолжение, если еще не достигнута стабилизация, или есть сомнения в терминальном завершении. Для исключения случайности в поведении траектории, траектория $\Phi(G, L_{act}, \lambda, \mu, T)$ вычисляется в 10-50 экземплярах и выбирается наиболее вероятная по типу завершения траектория $\Phi_{tail}(G, L_{act}, \lambda, \mu, T_1, T_2)$.

2-я стадия. На данном этапе для выделенной траектории определяется траектория $\Phi_{tail}(G, L_{act}, \lambda, \mu, T_1, T_2)$. На этой траектории вычисляется средняя плотность активных узлов $\bar{\rho}$ и среднее квадратическое отклонение σ . Обозначим через $dt = T_2 - T_1$.

$$\bar{\rho} = \frac{1}{dt} \sum_{i=T_1}^T \rho_i, \sigma = \sqrt{\frac{1}{dt} \sum_{i=T_1}^T (\rho_i - \bar{\rho})^2}.$$

На траектории выделяем следующие области:

- среднего значения – $\rho = \bar{\rho}$,
- полосу $\sigma - \bar{\rho} - \sigma < \rho < \bar{\rho} + \sigma$,
- полосу $2\sigma - \bar{\rho} - 2\sigma < \rho < \bar{\rho} + 2\sigma$,
- полосу $3\sigma - \bar{\rho} - 3\sigma < \rho < \bar{\rho} + 3\sigma$.

3-я стадия. На данной стадии по анализу полос 2σ и 3σ , описанным выше вычисляется порог неустойчивого горения λ_f , порог устойчивого горения λ_s .

Результаты экспериментов. Далее приведены экспериментальные результаты, полученные для случайных сетей $ER(1024, 0.1)$. Средняя валентность узла в рассматриваемом случае равна 102. Рассматриваются траектории при различных значениях параметра активации λ и фиксированном значении вероятности деактивации $\mu = 0.01$. Число активных вершин на начальном шаге равно 84. Значения λ рассматриваются из интервала $[0.01, 0.0115]$. Рассмотрены хвостовые траектории $\Phi_{tail}(G, L_{act}, \lambda, \mu, T_1, T_2)$ (Рисунок 1).

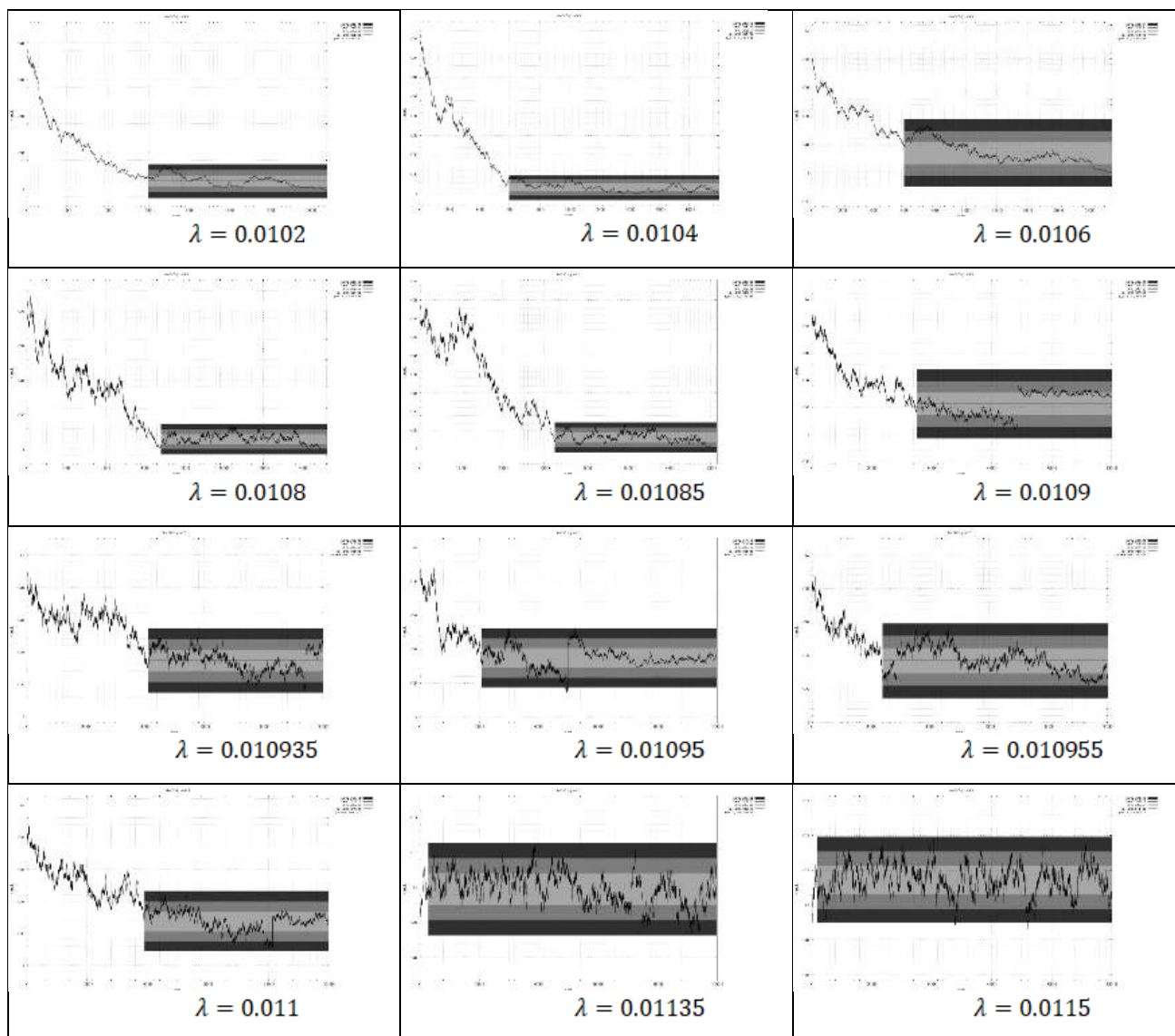


Рисунок 1. Результаты экспериментов, проведенных над сетями $ER(1024, 0.1)$ для разных значений параметра λ рассматриваются из интервала $[0.01, 0.0115]$.

Детальный анализ полученных результатов позволяет определить пороговые значения *неустойчивого горения* как $\lambda_f = 0.0102$ и *устойчивого горения* как $\lambda_s = 0.010935$. Таким образом зона неустойчивого горения это $\lambda \in (0.0102, 0.0109)$.

Список литературы:

1. Nykter M. et al. Gene expression dynamics in the macrophage exhibit criticality. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 105. 2008. PP. 1897–1900.
2. Furusawa C., Kaneko K. Adaptation to optimal cell growth through self-organized criticality. Phys. Rev. Lett. 108. 2012. PP. 208103.
3. Chen X., Dong X., Be'er A. et al. Scale-invariant correlations in dynamic bacterial clusters. Phys. Rev. Lett. 108. 2012. PP. 148101.
4. Haimovici A., Tagliazucchi E., Balenzuela P. et al. Brain organization into resting state

networks emerges at criticality on a model of the human connectome. Phys. Rev. Lett. 110. 2013. PP. 178101.

5. Moretti P., Muñoz M. Griffiths phases and the stretching of criticality in brain. Universidad de Granada. 2014. PP. 18071.
6. <https://neurodata.io/project/connectomes/>
7. Гусак А., Гусак В. и др. Справочник по высшей математике. ТетраСистемс. 1999. 640 стр.