

УДК 510.6

О ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ (МНОЖЕСТВ) КАНТОРА. МНОЖЕСТВА ТОЧЕК.

Царев Александр Евгеньевич

пенсионер, г. Новокузнецк

Аннотация. Теория множеств (многообразий) это один из разделов математики. В ней изучаются общие свойства множеств и определяются свойства и характеристики, обладающих какими-то общими свойством. Отцом теории по праву считается Георг Кантор, которому помогал Рихард Дедекинд. Автор теории предложил новую концепцию понимания природы бесконечности, но обоснование самой теории не совсем корректно, что породило логические противоречия как в самой теории, так и в последующих, на основе оной. Изначальная форма теории получила в дальнейшем название *наивная теория множеств*.

В этой монографии дан обстоятельный анализ теории множеств. В своё время теория множеств подверглась жёсткой критике со стороны известных математиков: Анри Пуанкаре, Лёйтзена Вейля и Германа Вейля и даже сподвижника Кантора Рихарда Дедекинда. Они утверждали, что до Кантора все выдающиеся математики, считали актуальную бесконечность не научным понятием и это было ошибкой. Научные споры по поводу наивной теории множеств не прекращается и до настоящего времени. В статье рассмотрены возможные неточности и даже ошибки в теории многообразий Кантора.

Ключевые слова: множество, мощность, интервал, длина.

ON THE THEORY OF THE VARIETIES CANTOR'S MANY

Tsarev Alexander Evgenievich.

Russia. Novokuznetsk. Pensioner.

Abstracts. Theory of sets (varieties) this one of the divisions of mathematics. In it they are studied the general properties sets are determined properties and characteristics, that possess what that general by property. Georg Cantor is considered the father of theory rightfully, which helped Richard Dedekind. The author of theory proposed the new concept of understanding nature of infinity, but the substantiation of theory itself is not entirely correct, which gave birth to logical contradictions both in theory itself and in those following, on its basis. The original form of the theory was later called the naive set theory. The monograph indicated in the list of literature provides a thorough analysis of set theory. At one time, set theory was severely criticized by well-known mathematicians: Henri Poincaré, Leutzen Weil and Hermann Weil, and even Cantor Richard Dedekind's associate. They asserted that to Cantor all put outting themselves of mathematics, considered urgent infinity not

scientific concept and this was error. Scientific disputes apropos of naive set theory it does not cease up to now. In the article possible inaccuracies and even errors in the theory of Cantor's varieties are examined.

The keywords: set, power, interval, length.

2. Введение.

Кантор, продолжив труды Римана в работах по теории тригонометрических рядов, понял, что следует определиться с точками и множествами оных, с размерами и количеством. Заинтересовавшись мощностями и сравнениями их, в 1873 году Кантор обнаруживает счётность множеств рациональных чисел, но не может решить вопрос о равной мощности целых чисел. Первые результаты, полученные Кантором, были приняты благосклонно Дедекиндом и Вейерштрассом и в период 1879-1884 года было опубликовано шесть статей в *Mathematische Annalen*.

Туманно сформулированное понятие множества в наивной теории, опиравшееся только на признак сбора всех объектов по каким-либо свойствам, спровоцировало к обнаружению серии противоречий, а именно парадокс Бурали-Форти, противоречивость универсума, парадокс Рассела, парадокс Ришара, парадокс Берри, парадокс Греллинга-Нельсона и тд. Попытки разрешить частным образом эти парадоксы привели к созданию нового направления в математике - интуиционизма и формализации теории множеств посредством подбора аксиом. Над этим работали Цермело, Гильберт, Бернайс, Хаусдорф, Брауэр, Пуанкаре, Лебег, Борель, Вейлем и другие. Тем не менее, общего принципа разрешения противоречий (фундаментальных ошибок в основе теории) так не нашли.

Общие понятия.

“Множество - это математический объект, сам являющийся набором, **совокупностью**, собранием каких-либо объектов, которые называются **элементами** этого множества и обладают общим для всех их характеристическим свойством.”

“Точка - это абстрактный объект, который не имеет измерительных характеристик: ни высоты, ни длины, ни радиуса.”

Линия, площадь и объём делимы на точки, но они в отдельности не имеют одинаковых свойств (характеристик).

Поэтому определение множества относится только к обратимым множествам.

Обратимое множество - это множество, сумма элементов которого равна основанию множества.

Необратимое (сопутствующее) множество - это множество, сумма элементов которого

не равна основанию множества.

Например, отрезок (основание множества), разделённый на бесконечно малые отрезки (элементы множества). Все отрезки имеют одно свойство-длину. Множество обратимо. Между отрезками расположены точки, они в этом случае являются границами между отрезками. И можно определить множество этих точек как сумму граничных точек, но эта сумма не имеет свойства длины, то есть множество необратимо относительно отрезка.

Основанием множества является то, что может быть делимо на элементы множества.

Основание может быть конечным и бесконечным, фиксированным и не фиксируемым.

Например, множество целых чисел бесконечная величина, множество бесконечно малых отрезков в сумме дающих отрезок конечной величины, конечно (длина основания конечна).

Простое множество это множество, которых состоят из однотипных элементов (элементов с одинаковыми характеристиками).

Сложное множество состоит из некоторого количества простых.

При делении и умножении бесконечного множества (множества с бесконечным количеством элементов) на конечное число, мощность множества не изменяется, а также не меняется, если прибавить или отнять конечное количество элементов.

Многообразие (Кантор) синоним множество (общепринятое).

Мощность множества это величина (порядок) бесконечности.

Конечные множества, то есть счётные обладают нулевой мощностью (величиной бесконечности).

Множества одного порядка (мощности) это те множества, которые больше или меньше в конечное количество раз или меньше или больше на конечную величину и при делении друг на друга результат будет конечным числом.

Идентичные мощности, это те мощности, при делении которых друг на друга, результат единица по модулю.

Те множества, которые меньше или больше в бесконечное количество раз являются множествами разной величины.

Если же мощности больше или меньше на бесконечную величину, то для определения соотношения величин мощности требуют дополнительные математические операции.

Прибавление, каких либо конечных чисел, как и вычитание, и умножение на конечные числа не изменяют порядок конечных множеств, за исключением умножения на ноль.

Деление на любой конечное число кроме нуля не изменяет порядок конечного множества.

Это же справедливо и для множеств других мощностей.

Неопределённые множества это те множества, в которых невозможно определить

мощность, в частности из-за отсутствия свойств, по которым можно определить мощность.

Без сравнения элементов множества и их количества невозможно сравнить и мощности.

Бесконечно малые величины положительные и отрицательные - это величины, значение (модуль) одного из параметров которых стремится к нулю.

Простые множества это множества, в которых все элементы характеризуются одинаковыми свойствами (одинаковым свойством).

Сложные множества это множества, состоящие из нескольких простых множеств.

Методики определения и сравнения мощностей (количества элементов) множеств.

Для того, что бы определить и сравнить количество элементов различных множеств, требуется определить порядок стремления к бесконечности через формулы, выраженные алгебраически.

Широко применяется интервал, то есть фиксированное значение чего-либо и может применяться как основа, так и как элемент множества.

Например, требуется сравнить множество целых чисел и дробных. И то и другое множество можно представить как сумму интервалов. Берём интервал между нулём и единицей (0,1)-в таком случае интервал и основание подмножества, и элемент множества. Количество целых чисел равно двум, количество дробных бесконечности. Из этого следует, что мощность множества дробных чисел больше чем целых чисел.

Интервал можно использовать и как элемент. Например.

Как сравниваются два отрезка? По длине мерки (эталоны) и количеству мерок в отрезке. Самый простой вариант это когда длина мерки одна для обоих сравниваемых отрезков и тогда сравниваются по количеству и если количество равное, то длины отрезков идентичны. В случаях же когда эталон разный сравниваются произведения длин эталонов на количество.

Эта методика применима и для тех случаев, когда сравнивают длины отрезков посредством сравнения мощностей множества точек принадлежащих к определённым отрезкам. Берётся интервал (линейный интервал) (a,b) бесконечно малой длины (эталон) и отрезки делятся на оный.

$$Ml = \frac{L}{(a,b)}, \text{ где } Ml \text{ количество точек на отрезке, } L \text{ длина отрезка, } (a,b) \text{ интервал.}$$

Затем сравнивается количество отрезков и из этого делается вывод о равенстве или неравенстве оных.

Размеры сравниваются по двум параметрам - по длине интервала и количеству самих интервалов, мысленно приложенных к измеряемым объектам, соответственно, размер это

произведению интервала на количество

$$L = (a, b) \times Ml$$

При сравнении идентичных отрезков, получаются и идентичные множества точек (сопутствующее множества). При сравнении отрезков, длина которых больше или меньше в конечное количество раз мощности множеств точек одного порядка.

Сравнение мощности множеств элементов составляющих пространство.

Элементы пространства точка, линия, плоскость, объём.

Из вышесказанного следует, что количество точек на линии бесконечно, тем не менее, есть формула, позволяющая определять относительность мощностей в случаях не произвольного взятия за основу количества точек. Так же следует что мощности множеств точек в отрезке одного порядка для отрезков конечной длины.

Плоскость можно представить как множество бесконечно малых площадей, которые разделены линиями. В таком случае множество линий, разделяющих плоскость на множество элементов множества, тоже будет необратимым (сопутствующим). Каждая линия состоит из бесконечного множества точек, соответственно, плоскость состоит так же из бесконечного количества точек, но мощность этого необратимого множества больше чем мощность множества точек на линии.

Объём делим плоскостями на бесконечное количество бесконечное малых объёмов, соответственно в таких случаях:

А) Множество плоскостей необратимо (сопутствующее).

Б) Множество точек в конечном объёме обладает большей мощностью, чем множества точек на конечной плоскости и на конечном отрезке.

В) Мощность множества линий в конечном объёме больше чем на конечной плоскости.

Ошибки Кантора.

Главная ошибка Кантора, повлекшая за собой некоторое количество неразрешимых парадоксов - это взятие за основу **произвольного** количества точек. Потому что произвольное количество это **неопределённость**.

«Как будет показано в нашем исследовании, элементы n-кратного протяжённого непрерывного многообразия можно будет однозначно и полно определить даже при помощи одной-единственной действительной непрерывной координаты t ». [1, с. 24]

Главное было определиться, что сравнивать, как сравнивать и для чего это делать.

Для обеспечения непрерывности не логично применять произвольные размеры

элементов множества это приводит к неопределённостям и вследствие этого к неразрешимым парадоксам.

Воспользуемся методикой проверки результатов в математике. То есть проведём операции с обратными действиями. Что бы получить, например бесконечное множество точек из линии нужно разделить линию по какому-то параметру получив элемент множества, который будет бесконечно малой величиной (других вариантов нет). Для проверки следует умножать или складывать элементы множества опять же по определённому параметру. В нашем случае бесконечная сумма элементов бесконечно малой величины. Если не определены порядки бесконечности суммы и элементов, то в результате получается неопределенность, что противоречит конечной величине длины отрезка.

В сухом остатке получается, что необходимо два параметра - определённые величины бесконечности суммы и элементов, а не один, как утверждает автор.

«Отсюда тогда вытекает, что если о характере соответствия не делать никаких предположений, то число независимых непрерывных действительных координат, требующихся для однозначного и полного определения элементов n -кратно протяженного непрерывного многообразия, можно брать произвольным, а значит, оно не может рассматриваться как неизменный признак заданного многообразия.» [1, с. 24].

Нельзя брать произвольным число независимых непрерывных координат, потому что получается противоречие.

«Оказалось, что на поставленный мною вопрос о том, можно ли непрерывное многообразие n измерений однозначно и полно отобразить на непрерывное многообразие только одного измерения, так что каждому элементу одного из них соответствует один и *только* один элемент другого, приходится ответить утвердительно.» [1, с. 24].

Неверное предположение.

“Поэтому, пользуясь введенным выше выражением, мы можем сказать, что мощность любого непрерывного n -кратно протяженного образа *равна* мощности однократно протяженного непрерывного многообразия, например, ограниченного непрерывного отрезка прямой линии.” [1, с. 25].

Это утверждение не верно, т.к. мощности не равны.

Автор так же не разобрался со следующими вопросами.

Что такое точка? Какие размеры точки в разных мерностях? Методика определения количества точек? Мощность множеств?

«Если два вполне определенных многообразия M и N можно однозначно и полно поэлементно сопоставить друг с другом (что всегда возможно и многими другими способами, если это сделано каким—либо одним), то далее удобно говорить, что эти многообразия имеют равную мощность или же что они эквивалентны». [1, с. 22].

Для этого как раз и подходит методика, описанная мною выше, автор же предоставляет методику с одной координатой (параметром).

«Итак, непрерывную поверхность можно однозначно и полно отобразить на непрерывную линию; тоже справедливо для непрерывных тел и непрерывных образов любого числа измерений.» . [1, с. 24].

Так поступать нельзя, поскольку мощности множеств разные.

«Поэтому, пользуясь введённым выше выражением, мы можем сказать, что мощность любого n -кратно протяжённого образа *равна* мощности однократно протяжённого непрерывного многообразия, например ограниченного отрезка прямой линии.» . [1, с. 24-25].

Здесь тоже мощности не равны.

«Когда рассматриваемые многообразия конечны, т.е. состоят из конечного числа элементов, то, как легко видеть, понятие мощности соответствует понятию численности, а, следовательно, понятию целого положительного числа, так как у двух таких многообразий мощности равны тогда и только тогда, когда численности их элементов одинакова.» . [1, с. 22].

Мощность у конечных множеств нулевая, в бесконечно же больших множествах мощности их определяются скоростью приближения к бесконечности, не численностью. То есть, если сравниваются два множества, то не бесконечная разница в численности имеет значения.

«Если M является многообразием мощности последовательности целых положительных чисел, то и каждая бесконечно составляющая часть M имеет такую же мощность что и M .» . [1, с. 23].

Утверждение неверное, т.к. мощность у бесконечно малой части M будет меньше чем у M .

«Если, M' , M'' , M''' ... - конечная или просто бесконечная последовательность многообразий, каждое из которых имеет мощность последовательности целых положительных чисел, то и многообразие M , полученное из объединения M' , M'' , M''' имеет ту же самую

мощность.» [1, с. 23].

В этом утверждении также имеется ошибка. При сложении конечного числа многообразий (множеств) полученное множество будет такой же мощности, при сложении бесконечного числа многообразий (множеств) полученное множество будет большей мощности. Здесь автор противоречит сам себе, ранее он утверждал, что бесконечное большое множество имеет большую мощность, чем конечное.

5. Заключение.

Из вышеизложенного можно смело сделать вывод, что многие выводы сделанные Кантором являются ошибочными из-за неправильного подхода.

Первопроходцам в науке простительно некоторые ошибки и заблуждения. Я анализировал исходя из имеющихся знаний и существующих противоречий в самой теории Кантора и последующих теорий на этой основе.

Новый методический подход по определению элементов множеств позволяет разрешить множество противоречий, как в самой теории Кантора, так и последующих на этой основе.

Список литературы:

1. Георг Кантор. Труды по теории множеств. Москва "Наука" 1985.