

ЧИСЛА-БЛИЗНЕЦЫ, ПРАЙМОРИАЛ И ПРОБЛЕМА ГОЛЬДМАХА

Ёлочкин Сергей Владимирович

Аннотация. Использование праймориала вызвало появление экзотического способа нахождения простых чисел и решение проблемы Гольдбаха.

Ключевые слова: Простое число, полупростое число, чётное число, праймориал, числа Евклида, решето Эратосфена, решето Сундарамы, решето Аткина, числа-близнецы, способы нахождения простых чисел, проблема Гольдбаха.

Введение

Праймориал или примориал (англ. *primorial*) числа n обозначается $p_n\#$ и определяется как произведение n первых простых чисел [2]. Например,

$$p_6\# = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 30030.$$

Иногда праймориалом называют число $n\#$, определяемое как произведение всех простых чисел, не превышающих заданное n .

Праймориальное простое

В теории чисел праймориальным простым числом называется простое число вида $p_n\# \pm 1$, где $p_n\#$ — праймориал p_n (то есть произведение первых n простых чисел). Числа вида $p_n\# + 1$ (не обязательно простые) называются числами Евклида.

Отсюда следует

$$p_n\# - 1 \text{ является простым для } n = 2, 3, 5, 6, 13, 24, \dots$$

$$p_n\# + 1 \text{ является простым для } n = 1, 2, 3, 4, 5, 11, \dots$$

Несколько первых праймориальных простых:

$$3, 5, 7, 29, 31, 211, 2309, 2311, 30029, 200560490131, 304250263527209$$

Несколько первых чисел Евклида:

$$3, 7, 31, 211, 2311, 30031, 510511$$

К марту 2012 года максимальным известным праймориальным простым числом было $1098133\# - 1$ ($n = 85586$) с 476,311 знаками.

Широко распространено мнение, что идея праймориальных простых принадлежит Евклиду и появилась в его доказательстве бесконечности числа простых чисел: Предположим, что существует только n простых чисел, тогда число $p_n\# + 1$ взаимно просто с ними, а значит либо оно является простым, либо существует ещё одно простое число.

Открытой проблемой остаётся, конечно или бесконечное количество праймориальных простых чисел (и, в частности, простых чисел Евклида).

Число Евклида $E_6 = 13\# + 1 = 30031 = 59 \times 509$ составное, что демонстрирует, что не все числа Евклида — простые. (в «Введение», весь текст, см. Праймориал или примориал — Википедия)

Давайте рассмотрим, что ещё может быть связано с простыми числами и праймориалом.

Праймориал и числа-близнецы.

Числа-близнецы - пары простых чисел, отличающихся на 2 (см. [1]). Можно указать такое выражение: $a \pm 1$ — либо это числа-близнецы, либо простое число только одно из них, либо (возможно) оба этих чисел не простые числа. Будем использовать праймориалы: $p_n\# \pm 1$.

Кроме близнецов, возможны ещё и «числа - однояродные братья», отличающихся на 4, «числа - двоюродные братья», отличающихся на 6, «числа - троюродные братья», отличающихся на 10 и т.д. Выглядеть всё это будет так :

$$p_n\# = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n, \text{ - праймориал} \quad (1)$$

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n \pm 1. \text{ - числа - близнецы.} \quad (2)$$

$$p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n \pm p_1. \text{ - числа - однояродные братья.} \quad (3)$$

$$p_1 \times p_3 \times \dots \times p_n \pm p_2. \text{ - числа - двоюродные братья.} \quad (4)$$

$$p_1 \times p_2 \times p_4 \times \dots \times p_n \pm p_3. \text{ - числа - троюродные братья.} \quad (5)$$

...

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots p_{i-1} \times p_{i+1} \times \dots \times p_n \pm p_i. \text{ - числа - i-яродные братья.} \quad (6)$$

...

$$p_2 \times p_3 \times \dots \times p_{n-1} \pm p_n. \text{ - числа - n-яродные братья.} \quad (7)$$

Про все указанные «братья», можно сказать, что эти пары чисел простые только возможны.

Следует о том, что сумма двух слагаемых всегда делится (нацело) на третье число только в том случае, когда на это третье число делятся оба слагаемых. Сумма двух слагаемых никогда не делится (нацело) на то третье число в том случае, когда на это третье число одно из слагаемых делится, а другое нет. А вот в том случае, когда оба слагаемых не делятся на третье число, то возможно что угодно, т.е. на это третье число вполне возможно будет делиться сумма слагаемых.

Можно выразить все эти пары таким образом (в этом случае можно включать в праймориал $p_0 = 1$, как тоже простое число) :

$$(p_n\# / p_i) \pm p_i \quad (8)$$

Далее, можно продолжить не ограничиваясь одним простым числом из праймориала. Таким образом, получается:

$$(p_n\# / (p_i \times p_j \times p_k \times \dots \times p_m)) \pm (p_i \times p_j \times p_k \times \dots \times p_m) \quad (9)$$

Главное в том, что вышеуказанная сумма никогда не делится (нацело) ни на одно простое число, включённое в праймориал, т.е. простое число $\leq p_n$. Таким образом, результат двух слагаемых будет либо новое простое число, либо составное двух (или более) произведённых новых простых чисел, которые тоже больших, чем состоящие в праймориал.

Рассмотрим теперь только разницу слагаемых.

$$(p_n\# / (p_i \times p_j \times p_k \times \dots \times p_m)) - (p_i \times p_j \times p_k \times \dots \times p_m) \quad (10)$$

Поскольку, можно выбрать такие слагаемые, которые максимально близки друг к другу. В этом случае, разница будет возможна либо 1, либо больше p_n . Если же разница слагаемых составлять будет меньше, чем p_n^2 , это будет именно простое число, которое даже не нужно проверять. Т.к. если даже теоретически ошибочно допустить, что произведение двух простых чисел $< p_n^2$, следовательно, если одно простое число будет больше p_n , то второе – меньше, что означает, что меньшее – противоречит возможность существовать о включению его в праймориал, т.к. (см. выше) вышеуказанная сумма никогда не делится (нацело) ни на одно простое число, включённое в праймориал, т.е. простое число $\leq p_n$. Вообще говоря, можно даже расширить решение о получении именно простого числа, т.к. разница слагаемых составлять будет меньше даже не p_n^2 , а $(p_n+2)^2$, т.к. p_n+2 есть самое ближайшее простейшее к p_n . Но результаты для малых значениях n получаются мало результатов, а для больших значениях n большие результаты, большие значения, чем $(p_n+2)^2$.

Кроме того, можно использовать ещё и различные степени простых чисел из формулы (10), что никак не изменяет на результаты предыдущего абзаца.

$$(p_i^{a_i} \times p_k^{a_k} \times p_g^{a_g} \times \dots \times p_n^{a_n}) - (p_j^{a_j} \times p_l^{a_l} \times p_f^{a_f} \times \dots \times p_m^{a_m}) \quad (11)$$

все указанные степени $a_i, a_j, a_k, a_l, \dots, a_m, \dots, a_n$ являются исключительно целочисленные значения.

Рассмотрим простейший пример.

Праймориал $p_3\# = 2 \times 3$ должны дать нам сколько получатся простых чисел, не выше чем $(p_3+2)^2$, т.е. $(3+2)^2 = 25$ и используя различные степени. Вот что получилось:

$$2 \times 3 \pm 1 = 5; 7;$$

$$3 \pm 2 = 1; 5;$$

$$2^2 \pm 3 = 4 \pm 3 = 1; 7;$$

$$3^2 \pm 2 = 9 \pm 2 = 7; 11;$$

$$2^3 \pm 3 = 8 \pm 3 = 5; 11;$$

$$2^4 \pm 3 = 16 \pm 3 = 13; 19;$$

$$3^2 \pm 2^3 = 9 \pm 8 = 1; 17;$$

$3^3 - 2^2 = 27 - 4 = 23$; (вообще говоря, 29 хотя тоже простое, но нужно не рассматривать, >25)

Таким образом, получившие (5; 7; 11; 13; 17; 19; 23) есть полный перечень простых чисел от 3 до 23 (<25).

Можно и продолжить, если увеличивать степени:

$$3^4 - 2^6 = 81 - 64 = 17;$$

$$2^8 - 3^5 = 256 - 243 = 13;$$

...

и т.д.

И все значения (<25, если правильно подобрать степени) есть исключительно простые числа.

Из всего вышесказанного, появился экзотический способ нахождения простых чисел, хотя он и очень сложен при больших чисел. Но, тем не менее, этот новый способ принципиально отличается от способов решето Эратосфена, решето Сундарамы и решето Аткина.

Проблема Гольдбаха.

В 1742 г. Гольдбах в письме к Эйлеру поставил проблему доказать, что *каждое нечетное число может быть представлено в виде суммы трех простых чисел (начиная с 7)*. Эйлер в ответном письме высказал гипотезу, что имеет место гораздо более сильное утверждение, которое гласит, что *каждое четное число, начиная с 4, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел*. Эти проблемы получили название проблемы Гольдбаха-Эйлера [5, с. 360]. Последняя из этих проблем носит название бинарной гипотезы Гольдбаха.

В 1966 году Чэнь Цзинжунь доказал, что любое достаточно большое чётное число представимо или в виде суммы двух простых чисел, или же в виде суммы простого числа и полупростого (произведения двух простых чисел). Например, $100 = 23 + 7 \cdot 11$ (см. [3]).

Однако, если указывать количество пар простых чисел, представляющие заданное чётное число, то получается так: $100 = 3+97 = 11+89 = 17+83 = 29+71 = 41+59 = 47+53$, т.е все

слагаемые указанных пар есть простые числа. В этом случае использование *полупростых* чисел теряют смысл.

На рисунке Рис.1 изображён график, на котором по горизонтали откладываются все подряд чётные числа, а по вертикали - количество пар простых чисел, суммы которых представляют данное чётное число.

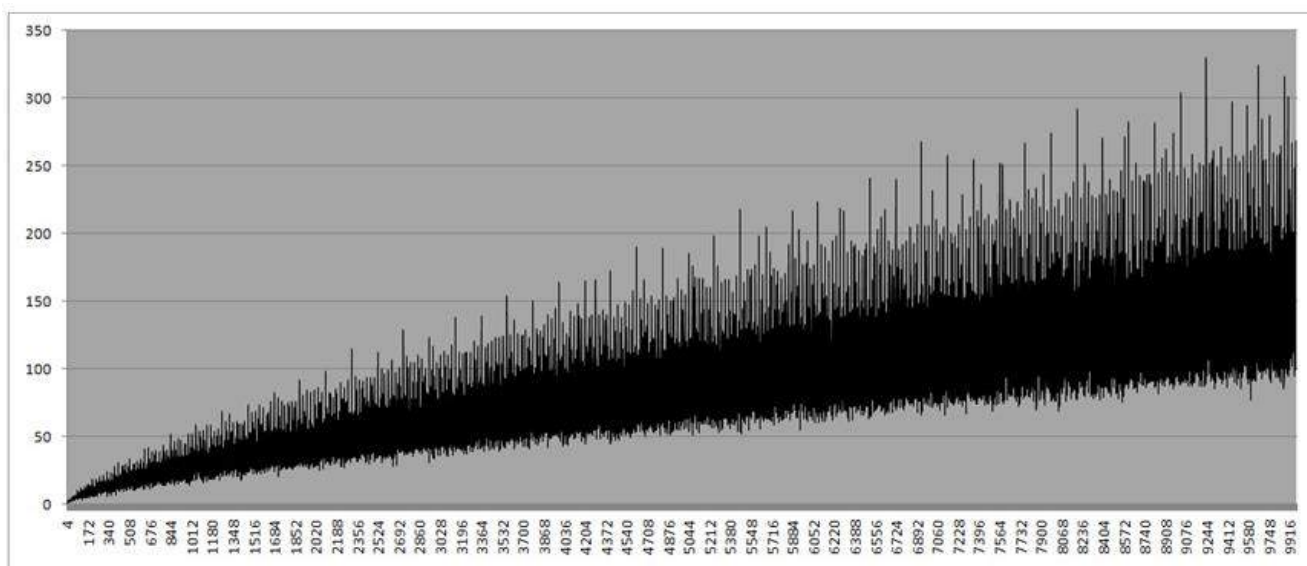


Рис.1

Как видно из графика, количества пар простых чисел, представляют данное чётное число по горизонтали, растет вполне понятно.

Далее, выбраны четные числа, составляющие удвоенные простые числа, т.е. $2 \times p_i$, (см. Рис.2).

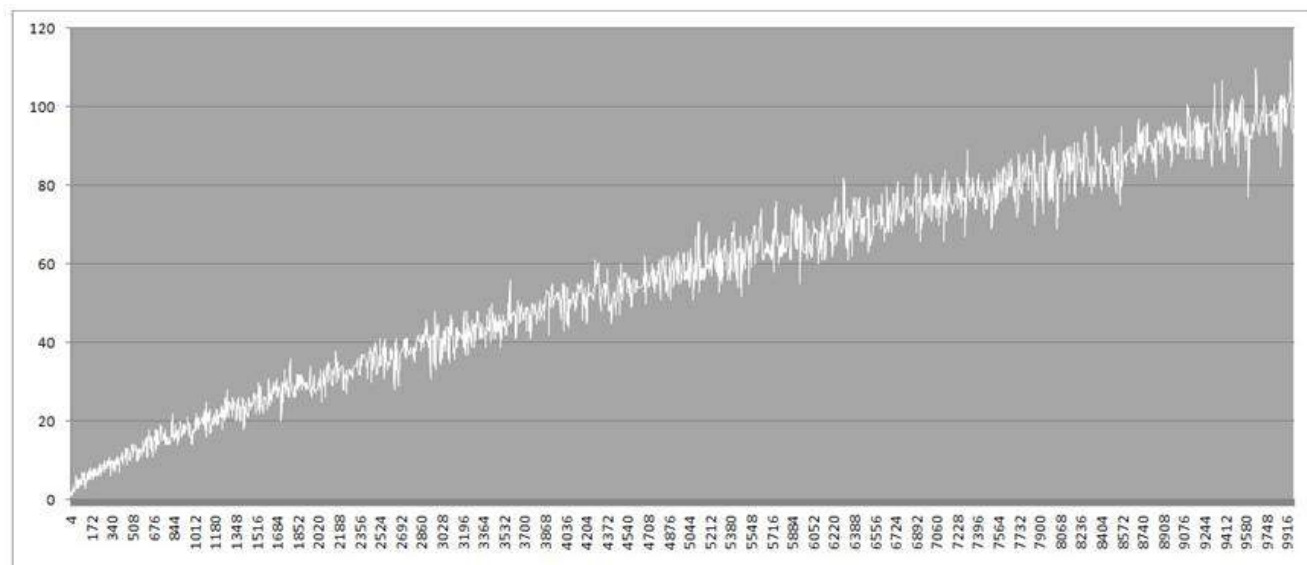


Рис.2

Как оказалось, такие чётные числа имеют **равные** или **меньшие** количества пар, суммы которые представляют данное чётное число, по сравнению с соседними ближайшими чётными числами. На Рис.3 были совмещены оба графика.

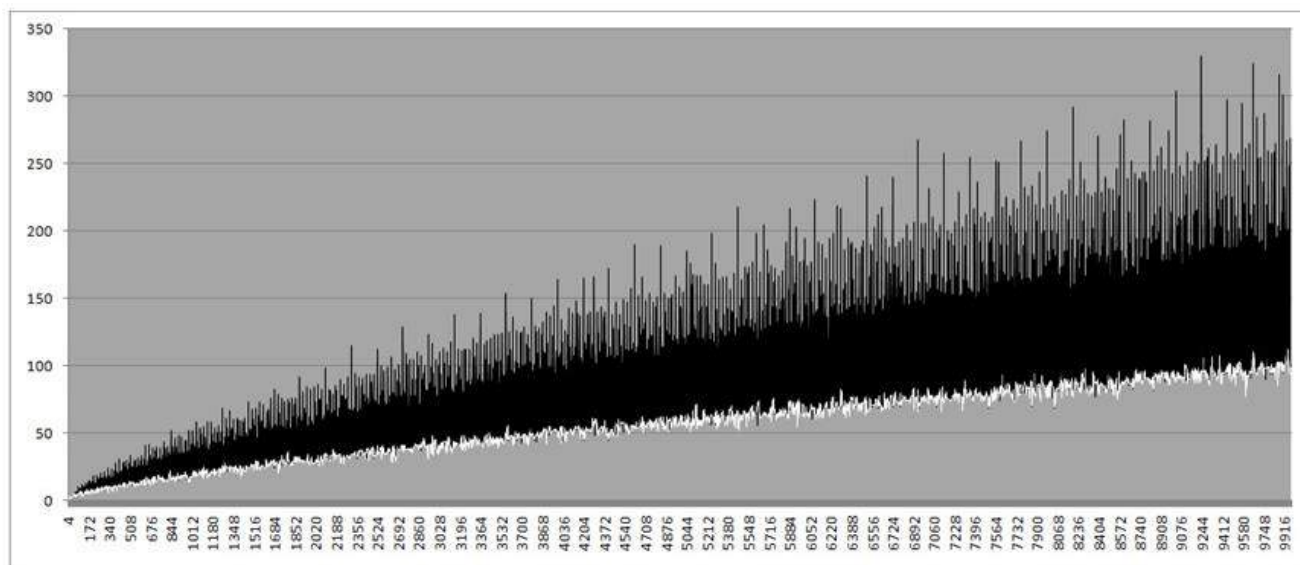


Рис.3

Возникает вопрос: почему получается именно так?

Укажем формулу выборов пар простых чисел для любых чётных чисел.

$$2 \times n = p_i + p_j \quad (12)$$

(n , вообще говоря, нечётное число, но не обязательно, p_i и p_j - простые числа)

Теперь переформулируем формулу, как искать:

$$2 \times n - p_i = x \quad (13)$$

Перебирая все простые числа, меньше n , какие-то значения x будут тоже простые. Если же x будут сложные, то будут состоящие произведения простых чисел, не составляющие простые числа входящие в n и p_i .

Получается, что четные числа состоятся из произведений двойки и других простых чисел, сама двойка тоже ведь простое. Минимальное число произведения простых чисел есть произведения двойки и другого простого числа.

А в этом случае, чем больше произведение простых чисел составляют чётное число, тем меньше составляет в результате x составляющее произведения простых чисел, входящие в исход. Следовательно, чем меньше простых чисел в произведениях четных числах, тем меньше получатся пары простых числах, см. в (14).

$$2 \times p_i - p_j = p_k \quad (14)$$

Если использовать предыдущую главу (формулы (8) и (9) и абзац текста сразу за ними), перечислим важные факты:

1. Числа, составляющие удвоенные простые числа, т.е. $2 \times p_i$, будут получать минимальные количества пар простых чисел, сумма которых составят указанные чётные числа. У двух соседних ближайших чётных числах, справа и слева, пар простых чисел будет не меньше (больше или равно).
2. Числа, составляющие удвоенные простые числа, т.е. $2 \times p_i$, принципиально не будет менее одной пары простых чисел, т.е. $2 \times p_i = p_i + p_i$, т.е. одна пара есть, другие чётные числа пар простых чисел не менее.

Из всего вышесказанного следует, что АБСОЛЮТНО ВСЕ ЧЁТНЫЕ ЧИСЛА представлены в виде суммы двух простых чисел. Следовательно, проблема Гольдбаха решена.

Заключение.

Открытые (нерешённые) математические проблемы — задачи, которые рассматривались математиками, но до сих пор не решены. Часто имеют форму гипотез, которые предположительно верны, но нуждаются в доказательстве.

Часть из них относятся к Открытые проблемы в теории чисел. Одна из них является Сильная проблема Гольдбаха. "Каждое чётное число, большее 2, можно представить в виде суммы двух простых чисел".

К сожалению, мною написанная статья несколько примитивна, ввиду моей инвалидности. Но ведь найдётся хоть кто-нибудь, кто либо разгромит эту статью (ткнув пальцем в конкретное значение), либо будет более обширно и грамотно её использовать.

Самое плохое, если никто ничего не ответит.

Список литературы:

1. "Числа-близнецы ", Материал из Википедии — свободной энциклопедии <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0-%D0%B1%D0%BB%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B5%D1%86%D1%8B>.
2. "Праймориал", Материал из Википедии — свободной энциклопедии, <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BB>.
3. "Проблема Гольдбаха", Материал из Википедии — свободной энциклопедии, https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%93%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B4%D0%B1%D0%B0%D1%85%D0%B0
4. "Гипотеза Лежандра (о простых числах)", Материал из Википедии — свободной энциклопедии,

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%B7%D0%B0_%D0%9B%D0%B5%D0%B6%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B0

5. Бухштаб А.А. Теория чисел. Издательство «Просвещение», Москва, 1966. 384 с.
6. "Справочный по математике (для научных работников и инженеров)", Корн Г., Корн Т. Издательство "Наука", Москва, 1972 г.