

ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Ибрагимова ФерузаАхметовна

студент 3 курса

ФГБОУ ВО «Калмыцкий государственный университет им. Б.Б.Городовикова», г.

Элиста

Аннотация. В данной статье изучены основные линейные нормированные пространства. Рассмотрены основные понятия и аксиомы метрики. Примеры линейных нормированных пространств.

Ключевые слова: линейные нормированные пространства, аксиомы метрики.

Определение: Линейное пространство E называется нормированным, если для каждого элемента $x \in E$ определено вещественное число, которое называется его нормой, обозначается символом $\|x\|$ и для которого выполняются следующие аксиомы

I). число $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0$ только для нулевого элемента $x = \bar{0}$ пространства E ;

II). $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для любого (вещественного или комплексного) числа λ ;

III). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Элементы линейного нормированного пространства E будем называть точками. Покажем, что любое линейные нормированные пространства E можно превратить в метрическое пространство, если расстояние (метрику) между любыми двумя точками $x, y \in E$ задать формулой $\rho(x, y) = \|x - y\|$ (1). Действительно, проверим выполнение аксиом метрики для метрики (1)

а) пусть $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow$ в силу (1) $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow$ по аксиоме I) элемент $x - y = \bar{0} \Leftrightarrow$ элементы x и y совпадают, то есть $x = y$ (выполняется).

б) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|-1 \cdot (y - x)\| = |no аксиоме II)| = |-1| \cdot \|y - x\| = 1 \cdot \|y - x\| = |no формуле (1)| = \rho(y, x)$ таким образом, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (выполняется).

в) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq |no аксиоме нормы III)| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (выполняется).

Аксиомы метрики выполняются, следовательно, формула (1) действительно задает в л. н. п. E расстояние между точками x и y .

Если $y = \bar{0}$, то $\|x\| = \rho(x, \bar{0})$ для любой точки $x \in E$.

Таким образом, нормированное пространство есть частный случай метрического пространства.

Все понятия и факты, изложенные в предыдущей главе для метрических пространств переносятся на нормированные пространства. Будем считать, что определения сходимости (по метрике), замкнутых и открытых множеств и другие определения связаны с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Пусть в произвольном линейном нормированном пространстве E для любой точки $x \in E$ заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$.

Определение: Будем говорить, что норма $\|x\|_1$ подчинена норме $\|x\|_2$, если неравенство $\|x\|_1 \leq \beta \cdot \|x\|_2$ выполняется для некоторого числа $\beta > 0$ и для любого $x \in E$.

Определение: Будем говорить, что две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны, если существуют числа $\alpha, \beta > 0$ такие, что неравенство $\alpha\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2$ выполняется для всех $x \in E$ или выполняется неравенство $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Если применить общее определение сходимости (по метрике) в метрическом пространстве к нормированному пространству, то получим следующее определение сходимости (по норме) в нормированном пространстве.

Определение: Говорят, что бесконечная последовательность точек $x_n \in E, n = 1, 2, \dots$ сходится к точке $x \in E$ по норме и пишут $x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$ если числовая последовательность норм

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Эта сходимость называется сходимостью по норме.

Отметим, что норма $\|x - y\|$ есть функция, непрерывная относительно аргументов x и y , то есть, если последовательность $x_n \rightarrow x$, а $y_n \rightarrow y$ по норме, то числовая последовательность $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|x - y\|$, если все элементы $y_n = \bar{0}$ то $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ при $n \rightarrow \infty$ если $x_n \rightarrow x$ по норме. Это свойство называется свойством непрерывности нормы.

Определение: Бесконечная последовательность точек $x_n \in E, n = 1, 2, \dots$ называется фундаментальной последовательностью (или сходящейся к себе), если норма

$$\|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty$$

Определение: Линейное нормированное пространство E называется полным пространством, если в нём сходится (по норме) любая фундаментальная

последовательность. То есть, из того, что $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$ следует, что существует $\lim x_n = x \in E$ такой, что $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение: Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством.

Примеры линейных нормированных пространств

1. Множество R всех действительных чисел x является линейным нормированным пространством R^1 если норму любого числа x задать по формуле $\|x\| = |x|$.

Проверим выполнение аксиом нормы

I. $\|x\| = |x| \geq 0$ для любого $x \in R$,

$\|x\| = |x| = 0$ только для числа 0 (выполняется).

II. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (выполняется)

III. Проверим неравенство треугольника

$\|x + y\| = |x + y| \leq |x| + |y| = \|x\| + \|y\|$ (выполняется)

Аксиомы нормы выполняются, следовательно, в пространстве R^1 формула $\|x\| = |x|$ действительно задает норму любого вещественного числа x , то есть R^1 — линейные нормированные пространства.

2. Рассмотрим действительное n — мерное пространство R^n

Норму вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно задать формулой $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

Если же норму $\|x\|$ этого же вектора x задать по другому, а именно, по формуле

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

Или по формуле $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ то мы получим линейные нормированные пространства R^n_1 и R^n_∞ соответственно.

3. Рассмотрим пространство вещественнозначных (или комплекснозначных) функций, непрерывных на заданном отрезке $[a, b]$.

Норму $\|f(t)\|$ любой функции $f(t)$ зададим равенством

$$\|f(t)\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

Получим линейное нормированное пространство

$$C_{[a,b]}$$

Если же норму функции $f(t)$ задать равенством

$$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt},$$

то получим линейное нормированное пространство

$$C_{2[a,b]}$$

4. Пространство m бесконечных ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ будет линейным нормированным пространством, если норму любой последовательности x определить по формуле $\|x\| = \sup_{k \geq 1} |x_k|$.

5. Пространство l_2 всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ таких, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_k|^2$ ($< \infty$), является линейным нормированным пространством, если взять $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_k|^2}$.

6. В пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на этом отрезке непрерывные производные до k – го порядка включительно, норму функции $f(t)$ можно вычислять по формуле:

$$\|f(t)\| = \max\{\max|f(t)|, \max|f'(t)|, \dots, \max|f^{(k)}(t)|\},$$

получим линейное нормированное пространство $C_{[a,b]}^{(k)}$, которое широко используется в вариационном исчислении.

Список литературы:

1. Вулих, Б.З. Введение в функциональный анализ/ Б.З. Вулих. – М.: Физматгиз, 1958
2. Городецкий, В.В. Методы решения задач по функциональному анализу/ В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев. – К.: Выпашк., 1990.
3. Иосида, К. Функциональный анализ/ К. Иосида. – М.: Мир, 1967.
4. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959.
5. Канторович, Л.В. Функциональный анализ/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1974.