



УДК 517.518.837

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ С ПАРАМЕТРОМ В ЕГЭ

Пинигина Анастасия Валерьевна

студентка 5 курса факультета математики,
информатики и естественных наук

Павлова Татьяна Вениаминовна

научный руководитель

Ишимский педагогический институт имени П.П. Ершова (филиал) ФГБОУ ВО «Тюменский
государственный университет», г. Ишим

Аннотация. В статье описан графический метод решения задач с параметрами на основе типовых примеров из ЕГЭ. Методика решения семейства кривых основывается на функционально-графическом методе. Рассматриваются разборы решений с параметром с применением элементарных преобразований графиков функций.

Ключевые слова: задачи с параметрами, функционально-графический метод, преобразование графиков, построение графиков, семейство кривых.

Решение уравнений, неравенств и их систем с параметрами считается одной из сложнейших тем математики. В основном эта проблема связана с тем, что в школах стандартные уравнения и неравенства приучают решать, следуя соответствующему алгоритму. Задачи с параметром имеют свой подход, здесь необходимо использовать элементы исследования. Графический метод решения уравнений, неравенств и их систем с параметрами более нагляден, по сравнению с аналитическим, но требует определенных умений: необходимо владеть набором элементарных преобразований графиков функций (сжатие или растяжение, симметрия относительно осей, сдвиги вдоль координатных осей, графики с модулем и т.п.); выполнять необходимые дополнительные построения, исследовать поведение семейства кривых в зависимости от значения параметра. Задачи с параметром традиционно включают в ЕГЭ по математике профильного уровня (задание 18) и относятся к заданиям максимально высокого уровня сложности [1].

Рассмотрим далее некоторые графические приемы решений задач с параметрами. В зависимости от роли параметра, выделяют два основных графических приема:

- 1) построение графического образа на координатной плоскости $(x; y)$;
- 2) построение на координатной плоскости $(x; a)$ [4, с. 97-99].

Далее для полного понимания приведем следующее понятие:



«Совокупность всех кривых, определяемых уравнением $\Phi(x,y,C)=0$ (1), называют семейством кривых с одним параметром – однопараметрическое семейство, а уравнение (1) уравнением этого семейства кривых...» [5, с. 103].

Разберем первый прием. Исходное выражение преобразуют к виду $g(x) = f(x, a)$ (или $g(x) \geq f(x, a)$) (1). На плоскости $(x;y)$ строим график функции $y = g(x)$ (*). А функция $y = f(x, a)$ (**) задает конкретное семейство кривых, которое зависит от параметра a . Кривые данного семейства получают из кривой (**) с помощью набора элементарных преобразований, которые описаны выше. Когда будет построен графический образ (1), то возможно установить, сколько точек пересечения имеют графики функций (*) и (**). Данное утверждение определяет количество корней выражения (1), а также исходного выражения, в зависимости от значения параметра.

Разбирая второй прием, исходное выражение преобразуют к виду $a = f(x)$ (или $a \geq f(x)$). На плоскости $(x;a)$ строят график функции $f(x)$ и потом пересекают данное построение прямыми, которые будут параллельны оси абсцисс. Таким образом, получают нужную информацию [7, с. 55-56].

Далее рассмотрим, с помощью каких преобразований плоскости можно использовать для перехода к другим кривым семейства.

Перейдем непосредственно для начала к части решений уравнений и неравенств с параметрами для линейных функций. Заметим, что: «... уравнение первой степени общего вида с переменной x является частным случаем линейного уравнения с одной переменной...» [2, с. 16].

1. Параллельный перенос

Пример 1.

Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leq |x - 3|$ образуют отрезок длины $\frac{2}{3}$.

Решение:

Перенесем единицу в правую часть неравенства:

$$|2x - a| \leq |x - 3| - 1.$$

После этого построим схемы графиков функций:

$$F(x) = |2x - a| \text{ и } G(x) = |x - 3| - 1.$$

Можем заметить, что данные функции являются прямыми, но с модулями. Другими словами, отрицательная часть изображается симметрично относительно оси ординат как показано на рисунке 1. Но перед этим преобразованием предшествует, сдвиги вправо на



несколько единиц и второе уравнение сдвигается вниз на единицу.

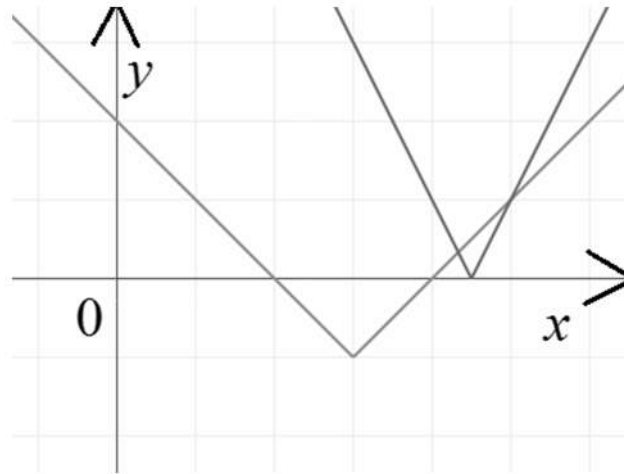


Рис.1

Из рисунка видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \leq 2$ или $\frac{a}{2} \geq 4$.

Составим две системы неравенств:

$$1) \begin{cases} a \leq 4 \\ |2x - a| \leq -x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 4, \\ 2x - a \leq -x + 2, \\ 2x - a \geq x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 4, \\ x \leq \frac{2+a}{3} \\ x \geq a - 2 \end{cases}$$

Тогда решения образуют отрезок $\frac{2}{3}$, если $\frac{a+2}{3} - a - 2 = \frac{2}{3}$, то $a=3$.

$$2) \begin{cases} a \geq 8 \\ |2x - a| \leq x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 8, \\ 2x - a \leq x - 4, \\ 2x - a \geq -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 8, \\ x \leq a - 4 \\ x \geq \frac{a+4}{3} \end{cases}$$

Тогда решения образуют отрезок $\frac{2}{3}$, если $\frac{a+4}{3} - a - 4 = \frac{2}{3}$, то $a=9$.

Ответ: $a=3$; $a=9$.

2. Поворот

Стоит заметить, что выбор семейства кривых не является однотипным. Но сами задачи наоборот. Во всех задачах присутствуют прямые (***) и к тому же играют роль центра поворота. Остановимся на семействе кривых вида

$y - y_0 = a(x - x_0)$, где $(x_0; y_0)$ – центр поворота [6].

Пример 2. Определите, при каких значениях параметра a минимум функции $f(x) = ax + |2x^2 - 3x + 1|$ больше -4.



Решение:

Определим, при каких значениях переменной x параметра a неравенство $|2x^2 - 3x + 1| > -4 - ax$ выполняется при всех x . На рисунке 2 изображен график функции $y = |2x^2 - 3x + 1|$. Итак, все прямые семейства $y = -4 - ax$ проходят через точку $(0; -4)$. Т.е. данная точка задает центр поворота данных прямых. По определению прямой положим, что $k = -a$, тогда правая часть неравенства будет выглядеть: $-4 + kx$.

Обратимся снова к рисунку 2 и видим, что в левой части неравенства изображена парабола, с отраженной частью, так как выражение стоит под знаком модуля. А в правой части неравенства будет прямая с угловым коэффициентом.

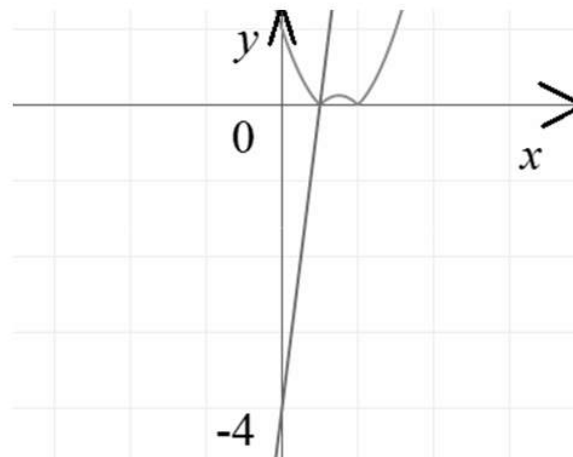


Рис.2

Меньшее значение параметра будет соответствовать касанию прямой с пересечением параболы с осью ординат ($y = 2x^2 - 3x + 1$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$). Тогда будем иметь значение параметра $a = -8$.

Найдем точки касания данных функций. Так как правые части уравнений равны, то будут равны и левые: $-4 + kx = 2x^2 - 3x + 1$. После чего преобразуем данное выражение и вычислим дискриминант:

$$2x^2 - (k+3)x + 5 = 0$$

$$D = (-(k+3))^2 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = k^2 + 6k - 40$$

$$\text{Найдем значения } k \text{ полученного выражения: } k^2 + 6k - 40 = 0.$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 36 + 160 = 196$$

$$k_1 = 4; k_2 = 10$$

$$4 < k < 10 \Rightarrow -10 < a < -4$$

Ответ: $-10 < a < -4$.

3. Гомотетия. Сжатие к прямой



Вспомним, что при гомотетии расстояние между точками не сохраняется, то есть подобные фигуры имеют равные углы. Таким образом, далее мы рассмотрим семейство кривых, которые будут получаться друг из друга с помощью гомотетии. Примером гомотетии может являться уравнение окружности, т.е. $x^2 + y^2 = a^2$ [6].

Пример 3. Изобразите графики уравнений

$$|x| + |y| = a \text{ и } x^2 + y^2 = a^2 \text{ при значениях параметра } a = 1; 2, 5; 3.$$

Решение:

Для начала построим график уравнения $|x| + |y| = a$. Очевидно, что значение параметра не должно быть отрицательно и данное уравнение задает квадрат. Иначе данное выражение не будет иметь смысла. Изобразим на графике данное выражение (Рис. 3):

$$|x| + |y| = a \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a, \text{ если } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0 \\ -x + y = a, \text{ если } x < 0 \text{ и } y \geq 0 \\ -x - y = a, \text{ если } x < 0 \text{ и } y < 0 \\ x - y = a, \text{ если } x \geq 0 \text{ и } y < 0 \end{cases}$$

Графиком второго уравнения $x^2 + y^2 = a^2$ будет являться окружность. Радиус данной фигуры будет являться параметр a с центром в точке $(0;0)$.

Данные уравнения задают два семейства кривых. Каждый из них являются гомотетичными с центром начала координат. Из рисунков видно, что данные графики уравнений увеличиваются при значениях параметра a для квадратов и окружностей.

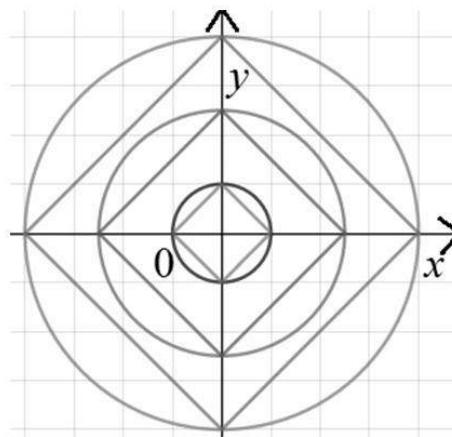


Рис.3

Стоит учесть, что при решении графическим методом лучше всего подкрепить свой ответ аналитическим способом. Это не только зафиксирует правоту выбранного решения, но и даст дополнительные баллы на экзамене. Таким образом, это докажет, что ученик в полной мере может разумно обосновать свои мысли.

Выделим следующие плюсы графического представления уравнения или системы



уравнений с параметром:

1. Построенный график дает определить, как влияет изменение параметра на решение уравнения;
2. В некоторых случаях график позволяет сформулировать необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи;
3. На основании графика возможно строить вполне строгие и обоснованные умозаключения о количестве корней уравнения и т.д.

Добавим, что для решения задач с параметрами выделяют мало часов на занятиях алгебры. Поэтому необходимо вводить элективные курсы или давать больше времени на факультативных занятиях, применяя функционально-графический метод при решении задач с параметрами для качественной подготовки учащихся. Таким образом, дети будут иметь навыки по построению, преобразованию графиков уравнений для решения задач с параметрами, которые раньше казались им нерешаемыми.

Список литературы:

1. Алексеевская А.А. Функционально-графический метод решения уравнений с параметрами в итоговой аттестации // Актуальные проблемы модернизации математического и естественно-научного образования: Сборник научных трудов по материалам Всероссийской научно-методической конференции (г. Балашов, 15 мая 2020 г.). – Саратов : Саратовский источник, 2020. – С. 19-23.
2. Беляева Э.С. Уравнения и неравенства с параметром. В 2 ч. Ч. 1: учебное пособие. – Москва: Дрофа, 2009. – 480 с.
3. Беляева Э.С. Уравнения и неравенства с параметром. В 2 ч. Ч. 2: учебное пособие. – Москва: Дрофа, 2009. – 444 с.
4. Горнштейн П.И. Задачи с параметрами. 3-е издание, дополненное и переработанное. – Москва: Илекса, 2005. – 328 с.
5. Литвинов А.И. Методическое пособие к практическим занятиям. – Москва: МТУ, 2013. – 103 с.
6. Погорелов А.В. Геометрия 7-9 класс. Учебник для общеобразовательных организаций. – Москва: Просвещение, 2014. – 240 с.
7. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. – Москва : МИЭТ, 2004. – 258 с.