



УДК 531.381, 517.933

ДВИЖЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА С ЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Макеев Николай Николаевич

пенсионер

Саратовская область, г. Саратов

Аннотация. Приёмами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений дана интерпретация движения гиростата в сплошной однородной среде с сопротивлением. Гиростат движется так, что его основное тело (основа) вращается вокруг неподвижного полюса, совмещённого с центром масс. В пространстве состояний построен фазовый портрет движения, отражающий динамические свойства и основные особенности динамики гиростата. Установлена маятниковая аналогия движения гиростата при линейной диссипации.

Ключевые слова: гиростат; динамическая система; линейная диссипация; фазовая траектория.

Введение

Исследования по динамике автономных гиростатических систем к настоящему времени не содержат достаточного общего анализа их фазовых характеристик, описываемых приёмами и методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Цель настоящей статьи – уточнить и расширить интерпретацию динамики автономного гиростата в линейно-диссипативной среде. Приведённое в статье описание топологической структуры областей движения, поля фазовых траекторий и типа бифуркаций уточняет картину движения гиростата, делая её детальной и более наглядной.

1. Уравнения движения

Гиростат с постоянным результирующим гиростатическим моментом $\mathbf{k}$ движется вне воздействия внешних активных сил вокруг неподвижного полюса O (центра масс) в линейно-диссипативной сплошной среде с заданными физическими характеристиками.

Введём координатный ортобазис $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, оси которого Ox_j направлены по главным в полюсе O направлениям тензора инерции гиростата. Обозначим: $\omega(\omega_j)$ – угловая скорость основы гиростата; $\mathbf{k}(k_j)$ – гиростатический момент;

$$\mathbf{L} = - [l_1\omega_1 \quad l_2\omega_2 \quad l_3\omega_3]^T \quad (1)$$



– результирующий момент диссипативных сил относительно полюса O ;
 $l_j \geq 0$ – постоянные заданные коэффициенты диссипации (числовые физические характеристики среды); T – символ транспонирования матрицы.

Уравнение движения гиростата с учётом предпосылок и равенства (1) имеет вид [1, с. 82]

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = \mathbf{L}, \quad (2)$$

где $\mathbf{A} = \text{diag} (A_1, A_2, A_3)$ – матрица тензора инерции гиростата, A_j – собственные значения оператора инерции гиростата.

Обозначим: $a_j = A_j^{-1}$ ($j = 1, 2, 3$),

$$m_1 = a_1 (A_2 - A_3) \quad (1, 2, 3), \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & -b_{22} & -b_{23} \\ -b_{31} & b_{32} & -b_{33} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $(1, 2, 3)$ – символ циклической перестановки индексов 1, 2, 3, а элементы b_{ij} матрицы $\mathbf{B}$ определяются равенствами

$$(b_{11}, b_{12}, b_{13}) = a_1 (l_1, k_3, k_2), \quad (b_{21}, b_{22}, b_{23}) = a_2 (k_3, l_2, k_1),$$

$$(b_{31}, b_{32}, b_{33}) = a_3 (k_2, k_1, l_3), \quad l_3 \neq 0,$$

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\omega} = [m_1 \omega_2 \omega_3 \quad m_2 \omega_3 \omega_1 \quad m_3 \omega_1 \omega_2]^T. \quad (5)$$

В равенстве (5) $\mathbf{M}$ – коммутатор дифференцирований (скобка Пуассона [2, с.178]), выраженный в осях координатного базиса Γ .

Представим уравнение (2) с учётом выражений (3)–(5) в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}. \quad (6)$$

Уравнение (6) в проекциях на координатные оси базиса Γ эквивалентно системе уравнений

$$\dot{\omega}_1 + m_1 \omega_2 \omega_3 + (\mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (1, 2, 3), \quad (7)$$

где $\mathbf{B}_j$ ($j = 1, 2, 3$) – вектор-строки матрицы $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}_1 = -b_{11}\omega_1 - b_{12}\omega_2 + b_{13}\omega_3,$$

$$\mathbf{B}_2 = b_{21}\omega_1 - b_{22}\omega_2 - b_{23}\omega_3,$$

$$\mathbf{B}_3 = -b_{31}\omega_1 + b_{32}\omega_2 - b_{33}\omega_3.$$

2. Топология движения гиростата в фазовом пространстве

Рассмотрим случай движения гиростата, при котором

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = k \neq 0, \quad A_j = A \quad (j = 1, 2, 3). \quad (8)$$



Последняя группа условий (8) определяет центральную кинетическую симметрию гиростата с центром в полюсе O . В силу данных ограничений имеем

$$m_j = 0, \quad b_{r3} = b_{3r} = 0 \quad (j = 1, 2, 3; \quad r = 1, 2)$$

и система уравнений (7) принимает вид

$$\dot{\omega}_1 = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2 \equiv \Phi_1(\Omega), \quad (9)$$

$$\dot{\omega}_2 = -b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2 \equiv \Phi_2(\Omega),$$

$$\dot{\omega}_3 = b_{33}\omega_3. \quad (10)$$

Здесь и всюду далее символ Ω обозначает совокупность величин (ω_1, ω_2) .

Состояние равновесия системы (9), (10) в фазовом пространстве определяется знаком параметра Δ , который, согласно критерию [3, с. 468], равен

$$\Delta = H^2 - 4a_1a_2k^2, \quad H = a_1l_1 + a_2l_2.$$

Динамическая система (9), (10) имеет *грубое* (по А.А. Андронову [4]) *состояние равновесия* с особыми точками: седло, существующее при $\Delta > 0$, или седло-фокус, образующееся при $\Delta < 0$.

У этих особенностей имеется двумерная сепаратрисная поверхность S и две изолированные сепаратрисы, расположенные по обе стороны от поверхности S . На поверхности S седла находится узел, тогда как поверхность S седла-фокуса содержит фокус. Остальные фазовые траектории системы (9), (10) пересекают достаточно малую окрестность седла и седла-фокуса как при возрастании, так и при убывании параметра – времени t [3].

Этот фазовый портрет трёхмерного поля траекторий является характерным для движения гиростата в диссипативной среде при малых и средних скоростях, когда диссипация определённо обладает линейными физическими свойствами.

3. Топология движения гиростата в фазовой плоскости

Пусть выполняются условия $t = t_* \geq t_0 \geq 0$ и $\omega_3^* = \omega_3(t_*)$, причём, согласно уравнению (10), имеем

$$\omega_3(t) = \omega_3^0 \exp(b_{33}t), \quad \omega_3^0 = \omega_3(0). \quad (11)$$

Рассмотрим топологическую структуру системы уравнений (9), (10) в фиксированной плоскости $\omega_3 = \omega_3^*$ фазового пространства согласно равенству (11). Фазовый портрет этой системы известен [3, 4].

Обозначим

$$D = G^2 - 4a_1a_2k^2, \quad G = a_1l_1 - a_2l_2,$$



введём функции нелинейных возмущений $(F_1, F_2) \in C^0$, воздействующих на линейную систему (9), и рассмотрим обобщённый случай, при котором задана система уравнений возмущённого движения вида

$$\dot{\omega}_r = \Phi_r(\Omega) + \lambda_r F_r(\Omega) \quad (r=1, 2), \quad (12)$$

где λ_1, λ_2 – постоянные неопределённые множители.

Зададим для функций F_1, F_2 условия: пусть $F_r(0,0)=0$; кроме того, для заданного числа $a > 0$ и функции $\mathbf{F}(F_1, F_2)$ существует предел при $W \rightarrow 0$ [5]

$$\lim [W^{-a} \mathbf{F}(F_1, F_2)] = 0, \quad (13)$$

где обозначено

$$W = |\omega_1| + |\omega_2|, \quad \mathbf{F}(F_1, F_2) = \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial F_i}{\partial \omega_j} \right|.$$

В равенстве (13) все частные производные – функции класса C^0 , определённые в окрестности начала координат – точки $U = (\omega_1 = \omega_2 = 0)$.

Если выполняется первое из условий

$$D \geq 0, \quad G = 0, \quad (14)$$

то точка U фазовой плоскости $V(\Omega)$ является узлом. Пусть $(F_1, F_2) = o(W)$ и разностные отношения функций F_1, F_2 в двух точках плоскости V ограничены. Тогда, согласно второму условию (14), через каждую точку в окрестности положения U проходит единственная фазовая траектория, соответствующая единственному определённому режиму движения гиростата.

В случае, при котором $D < 0, H \neq 0$ или если $H = 0$ и, согласно [5], условие

$$\Phi_1(\Omega) F_2(\Omega) \neq \Phi_2(\Omega) F_1(\Omega) \quad (15)$$

выполняется для всех точек плоскости V , отличных от точки U , эта точка – фокус. Если условие (15) не выполняется, то точка U есть центр или центр-фокус.

Рассмотрим топологическую структуру плоскости V динамической системы (12) при условиях

$$\lambda_1 = l_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \sigma = \text{const} > 0, \quad (16)$$

где σ – заданное число. Положим $z_1 = \omega_1, z_2 = b_{12} \omega_2$ и выберем

$$F_2(z_1, z_2) = b_{21} z_1 + b_{12}^{-1} [\sigma - (\lambda + b_{22}) z_2 - F(z_1)], \quad (17)$$

где $F \in C^1$. Согласно равенству (17), представим систему уравнений (12) при условиях (16) в виде

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = \sigma - \lambda z_2 - F(z_1). \quad (18)$$



Здесь $\lambda > 0$ – заданная постоянная, F – приведённая функция возмущения.

Пусть F есть 2π -периодическая монотонная функция, качественно идентичная гироскопической функции Лагранжа [2, с. 131], такая, что

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = 0. \quad (19)$$

Как известно [4], в этом случае при $0 < \sigma \leq 1$ пространство параметров (σ, λ) является грубым относительно класса характеристик приведённой функции F .

Рассматривая систему уравнений (18) на фазовом цилиндре $\Phi = (-\pi \leq z_1 \leq \pi)$,

устанавливаем, что два состояния равновесия этой системы находятся на его оси $z_2 = 0$ и являются фокусом и седлом. При этом в силу условия $\lambda > 0$ фокус является устойчивым, а при $\sigma = 1$ особые точки сливаются в одну точку – седло-узел.

Согласно критерию Дюлака [6] для системы уравнений (18) не существует предельных циклов, охватывающих положение равновесия. Кроме этого, не существуют и бифуркации, обусловленные возникновением предельного цикла.

Ограничение (19) показывает, что бифуркация, порождённая петлёй сепаратрисы, имеет место на фазовом цилиндре Φ только при $z_2 < 0$, $(\sigma, \lambda) > 0$ [3]. Здесь все фазовые траектории идут из бесконечности к устойчивому предельному циклу, находящемуся в полосе $\lambda^{-1}(1 + \sigma) < z_1 < \lambda^{-1}\sigma$ фазового цилиндра Φ .

Пусть теперь $\lambda = 0$, $0 < \sigma < 1$. Тогда на фазовом цилиндре Φ имеются особые точки: $z_1 = c$, $z_2 = 0$ (центр) и $z_1 = b$, $z_2 = 0$ (седло), где $b > c$ – действительные корни уравнения $\sigma - F(z_1) = 0$. Тогда уравнение сепаратрис, проходящих через седло, имеет вид

$$\frac{1}{2} z_2^2 = \sigma(z_1 - b) - \int_b^{z_1} F(\theta) d\theta \equiv Z. \quad (20)$$

Уравнение $Z = 0$ имеет двойной корень $z_1 = b$ и единственный простой корень $z_1 = c$ ($-\pi < c < b$). Тогда сепаратриса с уравнением (20) образует петлю, охватывающую положение равновесия $z_1 = a$. Сепаратриса седла на этом полуцилиндре уходит в бесконечность и при $\lambda^{-1}(1 + \sigma) < z_1 < \lambda^{-1}\sigma$ существует устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр Φ . Согласно критерию Дюлака [3] этот предельный цикл для данной динамической системы является единственным.

Заключение

Согласно фазовому портрету динамической системы гиростата на фазовой плоскости



имеются как замкнутые области периодических движений, так и области с неограниченными траекториями. Граница между этими областями – сепаратриса, связывающая седловые положения равновесия системы с узлами (фокусами) и предельными циклами.

Выделяя в динамической системе (18) колебательно-вращательное звено с координатой z_1 , получаем уравнение *обобщённого гипотетического маятника*

$$\ddot{z}_1 + \lambda \dot{z}_1 = \sigma - F(z_1) \quad (21)$$

с характеристикой, представленной в правой части уравнения (21).

Динамическая система (18) или (21) является двухпараметрической системой эволюционного типа, характеризующей движение механических систем маятникового вида в окрестности седловых точек фазовой плоскости. Этим определяется *маятниковая аналогия* движения гиростата между его движением вокруг неподвижного полюса (центра масс гиростата) и движением обобщённого гипотетического маятника, закреплённого в фиксированной неподвижной точке.

Данные системы уравнений моделируют движения гиростата, несущего упругие пружинные элементы большой жёсткости, которые применяются в таких механических приборах, как астатический маятник и виброграф Гейгера [7].

Список литературы:

1. Виттенбург Й. Динамика систем твёрдых тел. М.: Мир, 1980. 294 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
4. Андронов А.А. и др. Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959. 916 с.
5. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 478 с.
6. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 448 с.
7. Обморшев А.Н. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1965. 276 с.