



УДК 517.518.14

К ЗАДАЧЕ ОБ ИНТЕГРАЛЕ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Макеев Николай Николаевич

пенсионер

Саратовская область, г. Саратов

Аннотация. Рассмотрена задача о нахождении регулярного решения уравнения Лапласа в n -мерном евклидовом пространстве, представленного в автомодельной форме. Полученное аналитическое решение представлено в виде потенциалов скалярного поля для многомерных и трёхмерного случаев, определённых на гиперсфере с центром в начале системы декартовых координат. Интегралы уравнения Лапласа получены также в случаях двумерного и одномерного потенциалов с точностью до аддитивных постоянных интегрирования.

Ключевые слова: уравнение Лапласа; скалярный потенциал; автомодельный интеграл; гиперсфера.

В n -мерном евклидовом метрическом пространстве E_n или на его некотором открытом подмножестве введём открытую односвязную область D как открытое связное точечное множество. В этой области зададим функцию $V(x_s) \in C^2$, а также оператор Лапласа

$$\Delta_n = \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_s^2},$$

действующий в линейном пространстве гладких функций и ставящий в соответствии функции V функцию

$$\Delta_n V = \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_s^2}. \quad (1)$$

Зададим в пространстве E_n расстояние

$$r = \sqrt{\sum_{s=1}^n x_s^2} \quad (2)$$

и пусть $\lambda_s (s=1, \dots, n)$, ρ – произвольные действительные постоянные параметры, связанные зависимостью

$$z = \Phi_n(x_s) + \rho r = \sum_{s=1}^n \lambda_s x_s + \rho r. \quad (3)$$

Переменную z , определяемую зависимостью вида (3), называют

автомодельной



переменной [1, 2]. Рассмотрим случай, при котором функция V , гармоническая в области D , представляется в форме

$$V(x_s) = F(z), \quad (4)$$

где функция $F \in C^2$.

Ставится задача: найти функцию V , гармоническую в области D и такую, что для всех точек этой области выполняется условие (4).

Введём значения функций при фиксированном $s = p$ ($1 \leq p \leq n$)

$$P_1 = [F'(z)]_{s=p}, \quad P_2 = [F''(z)]_{s=p}, \quad q = r^{-1},$$

$$G(\lambda_s, x_s) = \lambda_s + \rho q x_s \quad (s = 1, \dots, n), \quad (5)$$

$$W_1(\lambda_s, x_s) = \frac{\partial V}{\partial x_s}, \quad W_2(\lambda_s, x_s) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_s^2}$$

и, предполагая существование зависимостей (3), (4), в силу равенства (2) вычислим при фиксированном значении $s = p$, согласно соотношениям (5), величины

$$W_1 = P_1 G,$$

$$W_2 = P_2 G^2 + P_1 \rho q^3 (r^2 - x_s^2). \quad (6)$$

Из равенств (6) согласно определяющему соотношению (1) в обозначениях (5) непосредственно следует

$$\Delta_n V = \sum_{s=1}^n W_2(\lambda_s, x_s). \quad (7)$$

Для суммы, содержащейся в равенстве (7), в силу второго слагаемого выражения величины W_2 (6) имеем

$$(n-1) \rho q P_1. \quad (8)$$

Обозначая величину

$$R_n^2 = \sum_{s=1}^n \lambda_s^2 - \rho^2,$$

представим сумму, содержащуюся в равенстве (7), в силу первого слагаемого выражения величины W_2 (6), применяя представления (2), (3), (5), в виде

$$\sum_{s=1}^n G^2(\lambda_s, x_s) = R_n^2 + 2\rho q z. \quad (9)$$

Согласно соотношениям (7)–(9) уравнение Лапласа в пространстве E_n принимает вид

$$(2\rho q z + R_n^2) P_2 + (n-1) \rho q P_1 = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим интеграл уравнения Лапласа, определённый при ограничении $R_n = 0$, для которого



$$\sum_{s=1}^n \lambda_s^2 = \rho^2. \quad (11)$$

Принимая в уравнении (11) все параметры λ_s за координаты точки $\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ в прямоугольной декартовой системы координат пространства E_n , находим, что эта точка расположена на гиперсфере радиуса ρ с центром в начале координат. При этом равенство (11) является уравнением этой гиперсферы, расположенной в области D , а интеграл (10) – *автомодельным интегралом* уравнения Лапласа $\Delta_n V = 0$.

В случае сферы ненулевого радиуса в области D с исключённым началом координат уравнение (10) принимает вид

$$2zP_2 + (n-1)P_1 = 0 \quad (\rho r \neq 0). \quad (12)$$

Интегрируя уравнение (12) с ограничением, при котором $n \neq 3$, в результате с точностью до аддитивной постоянной интегрирования получаем

$$F(z) = \pm C_1 m^{-1} |z|^m, \quad m = \frac{3-n}{2}. \quad (13)$$

Если $n = 3$, то из уравнения (12) с той же точностью следует

$$F(z) = C_2 \ln |z|, \quad (14)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Соотношения (13), (14) выражают *политропический* и *логарифмический интегралы* уравнения Лапласа, соответственно, и представляют автомодельную форму одноимённых потенциалов соответствующих скалярных полей.

Таким образом, согласно зависимостям (3), (4), (13), (14) в результате получаем, соответственно

$$V(x_s) = \pm C_1 m^{-1} |\Phi_n(x_s) + \rho r|^m \quad (n \neq 3), \quad (15)$$

$$V(x_s) = C_2 \ln |\Phi_n(x_s) + \rho r| \quad (n = 3), \quad (16)$$

где функция Φ_n определяется равенством (3).

В особом случае, при котором $\rho = 0$, из соотношения (3) следует

$$z = \Phi_n(x_n),$$

откуда, согласно уравнению (10), получаем

$$R_n^2 P_2 = 0 \quad \left(R_n^2 = \sum_{s=1}^n \lambda_s^2 \right). \quad (17)$$

Полагая $R_n \neq 0$, из уравнения (17) согласно выражениям (4), (5) в результате находим

$$V(x_s) = C_1 \Phi_n(x_s) + C_2, \quad (18)$$



где C_1, C_2 – постоянные интегрирования. Функция (18), являющаяся *линейным потенциалом*, удовлетворяет n -мерному уравнению Лапласа.

Таким образом, функции (15), (16), (18), выражающие потенциалы скалярного поля в пространстве E_n , составляют решение поставленной задачи о нахождении интегралов n -мерного уравнения Лапласа в автомодельной форме, определённых на гиперсфере с уравнением (11).

В тривиальных случаях, соответствующих частным значениям параметра $n = 2$ и $n = 1$, справедливо решение вида (15), в котором принимается, соответственно, $m = 0.5$ и $m = 1$. В частности, при $n = m = 1$ с точностью до аддитивной постоянной для функции линейного потенциала имеем $V(x_1) = \pm C_1 \lambda_1 x_1$.

Примечание. Статья представляет формализованное обобщение аналогичной задачи, решённой для двумерного уравнения Лапласа; в этой задаче рассматривались свойства напряжённого состояния упругого твёрдого тела [3]. Идея нахождения регулярного аналитического интеграла уравнения Лапласа в многомерном евклидовом пространстве, имеющего симметрическую автомодельную форму, проистекает от характера задач динамики сплошных сред, где она традиционно и эффективно применяется [4]. Этот факт подтверждает универсальный характер применения данного аналитического аппарата, позволяющего результативно моделировать процессы в задачах механики.

Список литературы:

1. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 256 с.
2. Баренблатт Г.И. Автомодельные явления: анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2009. 216 с.
3. Савин С.А. Об одном интеграле двумерного уравнения Лапласа // Прикладная математика и механика, 1951. Т. 15. Вып. 3. С. 392.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2 т. М.: Наука. Т. 1, 1970. 492 с.