



УДК 514.853

РЕГУЛЯРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ПСЕВДОВЕКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Макеев Николай Николаевич**Пенсионер****Саратовская область, г. Саратов**

Аннотация. Рассматривается движение вокруг неподвижного полюса абсолютно твёрдого тела, происходящее под воздействием системы заданных стационарных сил в псевдоевклидовом пространстве R_3^1 . Система содержит силы гироскопической структуры и силы стационарного однородного поля тяготения. Исследуются динамические свойства движений тела, для которых параметры его ориентации и их производные по времени являются заданными постоянными величинами (регулярные движения). Приводится критерий существования аналога регулярной прецессии тела, существующего в евклидовом пространстве, в поле силы тяжести пространства R_3^1 . Получены условия постоянности модуля результирующего силового вектор-момента, действующего на тело, и его ортогональности базовому орту при движении тела под воздействием заданного внешнего вектор-момента вне поля силы тяжести.

Ключевые слова: абсолютно твёрдое тело; прецессия; регулярное движение; псевдоевклидово пространство.

Введение

Рассматривается движение вокруг центра инерции абсолютно твёрдого тела в псевдоевклидовом пространстве R_3^1 с метрическим тензором g_{ij} , отнесённым к пространству конфигураций, компоненты которого

$$g_{11} = g_{22} = -1, \quad g_{33} = 1$$

и $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Тело вращается вокруг неподвижного полюса O (центра инерции) в однородном стационарном поле силы тяжести. При этом абсолют задаётся уравнением

$$(x \cdot x) = -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$$

и все точки данного тела расположены на сфере действительного радиуса [1]. Определения основных динамических величин твёрдого тела для неевклидовых пространств даны в работе [2].



В пространстве R_3^1 существуют силовые поля трёх типов: *собственное, идеальное и изотропное* силовое поле. Пусть $\mathbf{s}$ – направляющий орт силовых линий однородного поля силы тяжести или неподвижной фиксированной оси в случае отсутствия поля. Тогда собственному, идеальному и изотропному (несобственному) силовым полям пространства R_3^1 соответствуют направляющие орты, такие, что $\|\mathbf{s}\|^2 = (1, -1, 0)$.

1. Предварительные положения

Введём правый ортогональный координатный базис $Ox_1x_2x_3$, неизменно связанный с телом, оси которого совмещены с главными осями тензора инерции, отнесённый к неподвижному полюсу O .

Обозначим: A_j – собственные значения оператора инерции (диагональные элементы матрицы тензора инерции) тела; $\boldsymbol{\omega}(\omega_j)$ – угловая скорость тела; $\mathbf{r}(r_j)$ – радиус-вектор его центра масс; $\mathbf{s}(s_j)$ – направляющий орт силовых линий поля; P – величина веса тела. Здесь всюду $j = 1, 2, 3$; две оси Ox_j (главные оси инерции тела) являются в данном пространстве идеальными и одна – собственной [2]. В соответствии с этим величины A_1, A_2 являются главными моментами инерции сдвига, а A_3 – главным моментом инерции вращения относительно главного центра инерции тела. Для данных моментов инерции имеет место зависимость [1]

$$A_1 + A_2 - A_3 = 2k^2 M,$$

где M – величина массы тела, k – длина радиуса кривизны данного псевдоевклидова пространства.

Пусть на твёрдое тело действует система сил, результирующий вектор-момент которой представлен следующими проекциями на оси координат заданного базиса

$$\begin{aligned} G_1(\boldsymbol{\omega}) &= -k_3\omega_2 - k_2\omega_3, \\ G_2(\boldsymbol{\omega}) &= k_1\omega_3 + k_3\omega_1, \\ G_3(\boldsymbol{\omega}) &= k_2\omega_1 - k_1\omega_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Система сил, представленная равенствами (1), является *гироскопической системой* с заданными постоянными гироскопическими параметрами (гироскопическими коэффициентами [3]) k_j .

Согласно принятым предпосылкам движение твёрдого тела в пространстве R_3^1 , происходящее под воздействием поля силы тяжести и системы гироскопических сил (1), определяется системой уравнений [4]



$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 + A_2) \omega_2 \omega_3 - G_1 &= Q_3 s_2 - Q_2 s_3, \\ A_2 \dot{\omega}_2 - (A_1 + A_3) \omega_3 \omega_1 - G_2 &= Q_1 s_3 - Q_3 s_1, \\ A_3 \dot{\omega}_3 - (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 - G_3 &= Q_2 s_1 - Q_1 s_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $Q_j = Pr_j$ ($j=1, 2, 3$) – проекции барицентрического вектора $\mathbf{Q} = P\mathbf{r}$ на ось Ox_j .

Аналогами уравнений Пуассона в пространстве R_3^1 являются уравнения [1]

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \omega_2 s_3 - \omega_3 s_2, \\ \dot{s}_2 &= \omega_3 s_1 - \omega_1 s_3, \\ \dot{s}_3 &= \omega_1 s_2 - \omega_2 s_1, \end{aligned} \quad (3)$$

для которых первый интеграл имеет вид

$$-s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 = h,$$

где $h = (1, -1, 0)$, если вектор $\mathbf{s}$ – собственный, идеальный или изотропный, соответственно.

Ориентация твёрдого тела в псевдоевклидовом пространстве задаётся тремя действительными параметрами, являющимися аналогами классических углов Эйлера θ, ψ, φ в евклидовом пространстве. Здесь для параметров ориентации тела сохраним обозначения, принятые в случае евклидова пространства.

Получим соотношения, определяющие ориентацию тела в пространстве R_3^1 относительно заданного неподвижного инерциального координатного базиса. В соответствии с процедурой построения систем ориентирования тела в данном пространстве для движения в силовых полях различных типов [1, с. 61–63], получаем следующие аналоги кинематических уравнений Эйлера и характерных аналоговых зависимостей вида $\mathbf{s}(\theta, \psi, \varphi)$.

В случае *собственного* силового поля ($\mathbf{s}^2 = 1, 0 < \theta < \pi$):

$$\begin{aligned} \omega_* &= (i\dot{\psi} \operatorname{sh} \theta + \dot{\theta}) \mu(\varphi), \\ \omega_3 &= \dot{\psi} s_3 - \dot{\varphi}, \\ s_* &= i \operatorname{sh} \theta \mu(\varphi), \\ s_3 &= -\operatorname{ch} \theta, \quad i = \sqrt{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для *идеального* силового поля ($\mathbf{s}^2 = -1$):

$$\begin{aligned} \omega_* &= (\dot{\theta} - i\dot{\psi}) \mu(\varphi), \\ \omega_3 &= \dot{\psi} s_3 - \dot{\varphi}, \\ s_* &= -i \operatorname{ch} \theta \mu(\varphi), \\ s_3 &= \operatorname{sh} \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

При *изотропном* силовом поле ($\mathbf{s}^2 = 0$):



$$\begin{aligned}\omega_* &= -(\dot{\psi}s_3 + i\dot{\theta})\mu(\varphi), \\ \omega_3 &= -(\dot{\psi}s_3 + \dot{\varphi}), \\ s_* &= s_3\mu(\varphi), \\ s_3 &= -\exp(-\theta).\end{aligned}\tag{6}$$

В равенствах (4)–(6) обозначено:

$$\begin{aligned}\omega_* &= \omega_1 + i\omega_2, \quad s_* = s_1 + is_2, \\ \mu(\varphi) &= \exp(-i\varphi).\end{aligned}$$

2. Регулярные движения твёрдого тела

Определение 1. Регулярными движениями твёрдого тела относительно его центра инерции в пространстве R_3^1 называются движения, при которых заданные параметры ориентации θ, ψ, φ и их производные по времени t являются постоянными величинами для $t \in T \equiv [0, +\infty)$.

Определение 2. Регулярным движением первого рода называется состояние тела, при котором для $t \in T$ выполняются условия

$$\theta(t) = \theta_0 > 0, \quad \dot{\varphi}(t) = \omega, \quad \dot{\psi}(t) = \Omega,\tag{7}$$

где $\theta_0, \omega, \Omega \neq 0$ – постоянные.

Определение 3. Регулярным движением второго рода называется такое состояние тела, при котором для значений $t \in T$ выполняются условия

$$\dot{\theta}(t) = \omega_p, \quad \dot{\varphi}(t) = \omega, \quad \psi(t) = \psi_0,\tag{8}$$

где $\omega_p \neq 0, \psi_0$ – постоянные величины.

Определение 4. Регулярным движением третьего рода называется такое движение тела, при котором для значений $t \in T$ выполняются условия

$$\dot{\theta}(t) = \omega_p \neq 0, \quad \dot{\psi}(t) = \Omega, \quad \varphi(t) = \varphi_0 = \text{const}.\tag{9}$$

Эти движения являются аналогами соответствующих регулярных движений тела в трёхмерном евклидовом пространстве: движение (7) – аналог *регулярной прецессии*, (8) – аналог *регулярной нутации*, (9) – аналог *маятникообразного движения*.

Рассмотрим условие существования регулярного движения (7).

Теорема 1. Для того, чтобы регулярное движение (7) в силовом поле пространства R_3^1 существовало, необходимо и достаточно, чтобы при $\Omega\omega \neq 0$ выполнялись структурно-динамические ограничения

$$A_1 = A_2 = A, \quad k_j = r_j = 0 \quad (j=1, 2),\tag{10}$$

а также соотношения



$$(A + A_3) N \Omega^2 + (A_3 \sigma_1 \omega + \sigma_2 k_3) \Omega + \sigma_3 Q_3 = 0. \quad (11)$$

В равенствах (11) обозначено

$$N = (u_0, v_0, w_0); \quad \sigma_1 = (1, -1, -1), \quad \sigma_2 = (-1, 1, 1), \quad \sigma_3 = (1, -1, 1)$$

в собственном, идеальном и изотропном силовом поле, соответственно.

Доказательство. Необходимость. Пусть при $\Omega \omega \neq 0$ имеет место движение (7). Тогда, согласно соотношениям (4)–(6) в силу уравнений системы (2) получаем равенства, являющиеся тождествами по переменным θ, φ , из которых следуют ограничения (10), (11).

Достаточность. Пусть при $\Omega \omega \neq 0$ имеют место ограничения (10), (11). Тогда из третьего уравнения системы (2) следует интеграл

$$\omega_3 = \text{const} = \omega_3^0,$$

а из остальных уравнений согласно равенствам (4)–(6) в силу тождественности уравнений по θ, φ для каждого вида силового поля следуют условия, определяющие регулярное движение первого рода (7).

3. Динамические свойства регулярных движений

Согласно соотношениям (4)–(6) при условиях (7) имеет место следующее

Свойство 1. Для регулярного движения (7) при $t \in T$ выполняются равенства

$$\omega^2 = \begin{cases} \omega^2 + 2\Omega \omega u_0 + \Omega^2, & \mathbf{s}^2 = 1 \\ \omega^2 - 2\Omega \omega v_0 - \Omega^2, & \mathbf{s}^2 = -1 \\ \omega(\omega - 2\Omega w_0), & \mathbf{s}^2 = 0 \end{cases},$$

где $u_0 = \text{ch } \theta_0$, $v_0 = \text{sh } \theta_0$, $w_0 = \exp(-\theta_0)$. При этом в случае $\mathbf{s}^2 = (1, -1)$ для параметра σ имеем $\sigma = (\omega \cdot \mathbf{s}) \equiv 0$, если $\Omega = -\omega(u_0, v_0)$, соответственно, и $\sigma \neq 0$ при $\mathbf{s}^2 = 0$ для всех значений $t \in T$.

Определим, при каких моментно-силовых воздействиях на тело вне поля силы тяжести имеет место регулярное движение (7). Пусть на твёрдое тело действует система внешних постоянных сил с результирующим вектор-моментом $\mathbf{L}(L_1, L_2, -L_3)$. Согласно уравнениям системы (2), правые части которых заменим на $L_1, L_2, -L_3$, соответственно, в силу соотношений (4)–(6) получаем

Свойство 2. Для регулярного движения (7) в собственном силовом поле при $t \in T$ условия

$$\mathbf{L}^2 = -[A_1 \omega + (A_1 + A_3) \omega_3^0 + k_3]^2 a^2 = -(na)^2$$

и $l \equiv (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}) = 0$ выполняются лишь при ограничениях

$$A_1 = A_2 = A, \quad k_1 = k_2 = 0, \quad (12)$$



причём значения указанных параметров равны

$$\omega_3^0 = -(\omega + b), \quad a = \Omega v_0, \quad b = \Omega u_0.$$

Свойство 3. Для регулярного движения (7) в несобственных (идеальном и изотропном) силовых полях при $t \in T$ условия

$$\mathbf{L}^2 = -n^2[b^2, (\Omega w_0)^2]$$

и $l = 0$ выполняются лишь при ограничениях (12), причём имеет место зависимость для идеального и изотропного силового поля, соответственно,

$$\omega_3^0 = (a, \Omega w_0) - \omega.$$

Следствие. При регулярном движении (7) для собственного, идеального и изотропного силового поля результирующий вектор-момент $\mathbf{L}$ является идеальным, если $n \neq 0$.

Свойство 4. Для регулярного движения (8) в собственном и несобственных силовых полях при $t \in T$ имеют место условия

$$\omega^2 = \omega^2 - \omega_p^2, \quad \sigma \neq \text{const} \quad (\omega \neq 0). \quad (13)$$

Действительно, выражая величины ω^2 , σ в силу равенств (4)–(6) согласно условиям (8), получаем соотношения (13).

Следствие. Согласно равенству (13) вектор ω может быть как собственным, так и несобственным.

Свойство 5. Для регулярного движения (8) в собственном силовом поле при $t \in T$ условие $\mathbf{L}^2 = \text{const}$ имеет место лишь при условиях (12), а равенство $l \equiv 0$ в этом случае справедливо только, если $\rho = A_3 \omega - k_3$, причём $\mathbf{L}^2 = -(\rho \omega_p)^2$.

Следствие. Для регулярного движения (8) в собственном силовом поле при $t \in T$ и $\rho \neq 0$ вектор $\mathbf{L}$ является идеальным.

Свойство 6. Для регулярного движения (9) в силовом поле пространства R_3^1 при $t \in T$ выполняются соотношения

$$\omega^2 = [\Omega^2 - \omega_p^2, -(\Omega^2 + \omega_p^2), -\omega_p^2]$$

и $\sigma = (\Omega, -\Omega, 0)$ для $\mathbf{s}^2 = (1, -1, 0)$, соответственно.

Следствие. В несобственных силовых полях пространства R_3^1 вектор ω может быть только идеальным. При этом в общем случае $\mathbf{L}^2 \neq \text{const}$, а в особом случае, при $\Omega = 0$, имеет место соотношение

$$\mathbf{L}^2 = \{[(A_1 - A_2)\omega_p \cos \varphi_0 + k_1]^2 \sin^2 \varphi_0 - k_3^2\} \omega_p^2,$$

откуда при условиях (12) и $k_3 \neq 0$ следует, что вектор $\mathbf{L}$ – идеальный.



Примечание. Приведённые свойства регулярных движений получены на основе системы уравнений (2) и их видоизменений (с правыми частями L_j) в силу соотношений (4)–(10), (12).

Список литературы:

1. Косогляд Э.И. Движение твёрдого тела под действием сил на плоскости Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1970, № 9 (100). С. 59–68.
2. Широков А.П. Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского // Учёные записки Казанского университета. 1963. Т. 123, кн. 1. С. 196–207.
3. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.
4. Макеев Н.Н. Малые колебания и сферическое движение гиростата в псевдоевклидовом пространстве // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 417–423.